Algoritmuselmélet - Minta zárthelyi, megoldásokkal
2024 tavasza

A munkaidő 90 perc. A VÁLASZOKAT INDOKOLNI KELL.
Hivatkozni csak az előadáson tanultakra lehet.

1. Az alábbi függvények közül pontosan egyre igaz, hogy $O(n^2)$-es.
$$\log(n^2) + \tfrac{n(n-1)(n-2)}{2010} \qquad 2020n\log n + \frac{2^n \cdot n(n-1)}{3^n} \qquad 20n^2(\log n)^2 + 8$$
(a) Válassza ki ezt a függvényt és lássa be megfelelő c konstans és n_0 küszöbérték megadásával, hogy $O(n^2)$-es.
(b) A másik két függvény egyikéről (szabadon választhat, hogy melyikről) bizonyítsa be, hogy az nem $O(n^2)$-es.

2. Az $A[1:n]$ tömb pozitív számokat tartalmaz (a számok nem feltételenül egészek és lehetnek 1-nél kisebb értékek is). Szeretnénk megtalálni azt az $A[i:j]$ résztömböt ($1 \leq i \leq j \leq n$), melyben a számok szorzata a lehető legnagyobb. Adjon $O(n)$ lépésszámú, dinamikus programozást használó algoritmust az elérhető legnagyobb érték megtalálására az alábbi részfeladatok megoldásával: $M[j]$ adja meg a legnagyobb elérhető szorzatot, ha a résztömb utolsó cellája j.

3. Egy **irányítatlan** G gráf csúcsai A, B, C, D, E, F, H. Mélységi bejárást (DFS-t) futtatva a D csúcsból kiindulva a feszítőfába a DA, AB, AC, DE, EF, FH élek kerülnek be ebben a sorrendben.
(a) Lehetséges-e, hogy a G gráfban van AE él?
(b) Lehetséges-e, hogy a G gráfban van EH él?

4. Éllistájával adott egy n csúcsú irányítatlan gráf és abban két kijelölt csúcs, A és B. A gráf minden csúcsa ki van színezve vagy pirosra vagy kékre, ez az információ egy S tömbben adott, amely a csúcsokkal van indexelve és ahol $S[v]$ a v csúcs színét adja meg. A gráf egy élét tarkának nevezzük, ha egyik végpontja piros, a másik pedig kék. Adjon $O(n+m)$ lépésszámú algoritmust, ami meghatározza, hogy van-e olyan út az A csúcsból a B csúcsba, ami csupa tarka élből áll és ha van ilyen, akkor azt is megmondja, hogy hány tarka élből áll a legrövidebb ilyen út.

5. A következő nyáron sok minket érdeklő fesztivál lesz, azonban sajnos ezek időpontjai között vannak átfedések. Ha egy fesztiválra elmegyünk, azon az első naptól az utolsóig ott akarunk lenni, de másnap már mehetünk egy újabbra. A szóba jövő f fesztivál mindegyikéről tudjuk,hogy melyik nap kezdődik és melyik nap végződik, célunk hogy minél több napot töltsünk fesztiválokon. Fogalmazza meg a feladatot egy gráfelméleti problémaként és adjon $O(f^2)$ lépésszámú algoritmust a fesztiválok egy ilyen kiválasztására.

6. Dijkstra algoritmusát futtatjuk egy, az A, B, C, E, F, G csúcsokból álló irányítatlan gráfon. Az alábbi táblázat az $D[\ ]$ tömb változását mutatja a futás közben.
Melyek azok az élek, amik biztosan szerepelnek a gráfban és mi ezeknek a súlya?

	A	B	C	E	F	G
1.	0	∞	∞	3	∞	1
2.	0	∞	5	2	4	1
3.	0	7	3	2	4	1
4.	0	6	3	2	4	1
5.	0	5	3	2	4	1

7. Adott egy pozitív egész számokból álló összeg: $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Az összeadás jelek közül szorzásra cserélhetjük bármelyikeket, de csak úgy, hogy ne legyenek szomszédos szorzások (azaz minden szám legfeljebb egy szorzásban szerepelhet). Adjon $O(n)$ futásidejű algoritmust, ami meghatározza, hogy mekkora az ilyen cserékkel kapható számok maximuma. Például az $1+4+3+2+3+4+2$ összegből kapható maximum $29 = 1 + 4 \cdot 3 + 2 + 3 \cdot 4 + 2$.