Algoritmuselmélet

DAG, topologikus rendezés

Katona Gyula Y. / Vizer Máté

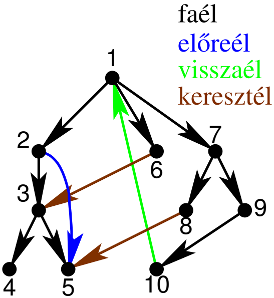
Számítástudományi és Információelméleti Tanszék
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Irányított körmentes gráfok

Egy G irányított gráf *DAG*, ha nem tartalmaz irányított kört.
Directed Acyclic Graph
Alkalmazásai például:

- Teendők ütemezése $\Longrightarrow$ PERT
- Várakozási gráfok $\Longrightarrow$ adatbázisok

Fontos, hogy egy irányított gráfról el tudjuk dönteni, tartalmaz-e irányított kört.



Ha a gráf egy mélységi bejárása során találunk visszaélet akkor a gráf nyilván tartalmaz irányított kört, azaz nem DAG.

Tétel

Legyen $G = (V, E)$ egy irányított gráf. Ha G egy DAG, akkor egyetlen mélységi bejárása során sincs visszaél. Fordítva erősebb igaz: ha G-nek van olyan mélységi bejárása, amelyre nézve nincs visszaél, akkor G egy DAG.

Bizonyítás.

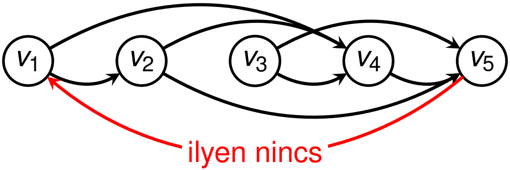
$\Longrightarrow \quad \surd$

$\Longleftarrow$ Indirekt: Tegyük fel, hogy nincs visszaél, de G nem DAG $\Longrightarrow$ van benne irányított kör: vegyük ennek a legkisebb mélységi számú v csúcsát, a kör előző pontja legyen u. $\Longrightarrow$ mszám[v] $<$ mszám[u] $\Longrightarrow$ uv vissza- vagy keresztél, de u elérhető v-ből G-ban irányított úton, ahol a mélységi számok mindegyike $\geq$ mszám[v] (a kör élein keresztül; (részfa lemma)) $\Longrightarrow$ nem lehet keresztél $\Longrightarrow$ u a v leszármazottja a DFS fában $\Longrightarrow$ uv visszaél. $\lightning$ $\square$

DAG topologikus rendezése

Definíció

Legyen $G = (V, E)$ ($|V| = n$) egy irányított gráf. G egy ***topologikus rendezése*** *a csúcsoknak egy olyan $v_1, \ldots, v_n$ sorrendje, melyben $x \to y \in E$ esetén x előbb van, mint y (azaz ha $x = v_i, y = v_j$, akkor $i < j$).*



DAG topologikus rendezése

Tétel

Egy irányított gráfnak akkor és csak akkor van topologikus rendezése, ha DAG.

Bizonyítás.

$\Rightarrow$: Ha G nem DAG, akkor nem lehet topologikus rendezése, mert egy irányított kör csúcsainak nincs megfelelő sorrendje, mert semelyik csúcs sem előzheti meg a körben előtte állót.

$\Leftarrow$: Ez az irány a következő tételből következik. $\square$

Topologikus rendezés mélységi kereséssel

Tétel

Végezzük el a G DAG egy mélységi bejárását, és írjuk ki G csúcsait a befejezési számaik szerint növekvő $w_1, \ldots, w_n$ sorrendben. Ennek megfordítása csökkenő sorrendbe, vagyis a $w_n, w_{n-1}, \ldots, w_1$ sorrend, a G DAG egy topologikus rendezése.

Bizonyítás.

Azt kell belátnunk, hogy ha $w_i \to w_j$ éle G-nek, akkor $i > j$.
Tegyük fel, hogy van olyan $w_i \to w_j$, amire
$j = \text{bszám}[w_j] > \text{bszám}[w_i] = i$.
Az élek osztályozásánál már láttuk, hogy ez csak úgy lehetne, ha **visszaél**. De mivel a gráf DAG ez sem lehet. $\lightning$ $\square$

Lépésszám: $O(n+m)$

Legrövidebb utak élsúlyozott gráfban

Élsúlyozott gráf: $G = (V, E, c)$, ahol $c : E \to \mathbb{R}$ egy az élhalmazon értelmezett függvény. $c(e)$ az e él súlya (vagy költsége vagy hossza), lehet negatív is.

Élsorozat súlya (költsége, hossza): Az élsorozat éleinek súlyának összege.

Legrövidebb élsorozatok egy adott pontból:

Input: $G = (V, E, c)$, $s \in V$
(irányított vagy irányítatlan gráf is lehet)

Output: A legrövidebb (legkisebb súlyú) élsorozat és annak hossza s-ből a gráf minden más pontjába.

Megjegyzés: Ha az irányított gráfban van negatív súlyú irányított kör, akkor ezen sokszor végigmenve végtelenségig csökken az összsúly $\Longrightarrow$ nem feltétlen lesz legrövidebb élsorozat. Hasonló a helyzet irányítatlan gráfban lévő negatív összsúlyú kör esetén.

Legrövidebb utak élsúlyozott gráfban

Feltesszük, hogy a gráfban nincs negatív súlyú kör.

Így viszont ha egy élsorozat egy pontot többször is érint, akkor tartalmaz egy kört, aminek súlya ≥ 0. Ha ezt kihagyjuk az élsorozatból, akkor az összsúly nem nő $\implies$ kaptunk egy rövidebb vagy ugyanakkora súlyú élsorozatot.

Legtöbbször nem érdekes, hogy esetleg beilleszthető az útba egy nulla összsúlyú kör. $\implies$
Feltesszük, hogy a gráfban minden kör hossza pozitív.

Ekkor minden legrövidebb élsorozat egy út.

Legrövidebb utak DAG-ban

Speciális eset: $c(e) = 1$ minden élre
$\Longrightarrow$ Szélességi keresés – BFS

Volt BSZ2-ből

Mostani speciális eset: a gráf DAG

Az általános feladatról majd később lesz szó BSZ2-n.

Legrövidebb utak DAG-ban

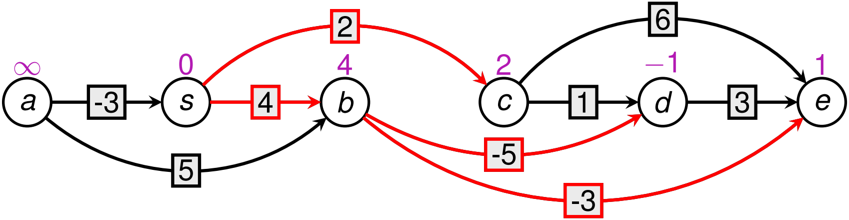
Az algoritmus éllistával adott gráf esetén

procedure SHORTEST-PATH($G = (V, E, c), s$)

  megkeresek G-nek egy topologikus rendezését:
    $v_1, \ldots, v_n;\ s = v_k$ ▷ *ehhez először DFS(G, v)-t futtatjuk*
  előállítom G fordított éllistáját ▷ *volt gyakorlaton*
  for $i = 1$ to $k - 1$ **do**
    távolság[v_i] $= \infty$
  end for
  távolság[v_k] $= 0$
  for $i = k + 1$ to n **do**
    távolság[v_i] $:= \min_{(v_j, v_i) \in E} \{$távolság[$v_j$] $+ c(v_j, v_i)\}$
    honnan[v_i] $:=$ az a v_j, ahol az előbb a minimumot találtuk
  end for

end procedure

Legrövidebb utak DAG-ban



$$\min(5+\infty, 0+4) = 4$$

$$\min(0+2) = 2$$

$$\min(2+1, 4+(-5)) = -1$$

$$\min(2+6, (-1)+3, 4+(-3)) = 1$$

Legrövidebb utak DAG-ban

Tétel

Ha G egy éllistával adott súlyozott élű DAG, akkor az egy forrásból induló legrövidebb utak meghatározásának feladata $O(n+m)$ lépésben megoldható.

Bizonyítás.

Helyesség: Mivel minden él és út balról jobbra megy, ezért az s-től balra lévő csúcsokba nyilván nem lehet eljutni.
A jobbra levő pontokra indukcióval bizonyítunk: Tegyük fel, hogy minden $j < i$-re távolság[v_j] már a legrövidebb út hossza. Indirekt tegyük fel, hogy v_i-be van rövidebb út, mint

$$\min_{(v_j,v_i)\in E}\{\text{távolság}[v_j] + c(v_j, v_i)\}.$$

Ha ennek utolsó éle (v_x, v_i), akkor v_x-be volna egy út, ami rövidebb, mint távolság[v_x]. $\lightning$ □

Legrövidebb utak DAG-ban

Tétel

Ha G egy éllistával adott súlyozott élű DAG, akkor az egy forrásból induló legrövidebb utak meghatározásának feladata $O(n+m)$ lépésben megoldható.

Bizonyítás.

Lépésszám:

- Topologikus sorrend keresése (2: sor a kódban): $O(n+m)$
- Fordított éllista előállítása (3: sor): $O(n+m)$
- Kezdőértékek beállítása (4-7: sor): $O(n)$
- (8-11: sor): Az összegek kiszámolása és egy minimum keresés $d_{be}(v_i)$ érték között (de mindenképpen legalább 1 lépés) a 9: sorban. Összegezve: $\sum_{k+1}^{n}(1+O(d_{be}(v_i))) = O(n+m)$

Összesen: $O(n+m)$ lépés. $\square$

Leghosszabb utak DAG-ban

Leghosszabb élsorozat nem feltétlen létezik, ha van pozitív összsúlyú irányított kör. Mivel DAG-ban nincs semmilyen irányított kör, így mindig van leghosszabb élsorozat, ami egyben a leghosszabb út is.

Tétel

Ha G egy éllistával adott súlyozott élű DAG, akkor az egy forrásból induló leghosszabb utak meghatározásának feladata $O(n+m)$ lépésben megoldható.

Bizonyítás.

Ugyanaz az algoritmus működik, csak

$$\text{leghosszabb}[v_i] := \max_{(v_j, v_i) \in E} \{\text{leghosszabb}[v_j] + c(v_j, v_i)\},$$

illetve az s-ből el nem érhető csúcsok távolsága legyen $-\infty$. $\square$

Nem DAG-ban is értelmes kérdés, hogy mi a leghosszabb út (ami nem megy át egy ponton többször).

Ez jóval nehezebb feladat, nem ismert rá gyors algoritmus.