Adatbáziskezelés

Hűséges felbontás, normálformák

Katona Gyula Y.

Számítástudományi és Információelméleti Tanszék
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Felbontások

Cél: *Adott (R, F) sémából anomáliát nem tartalmazó olyan felbontás előállítása, amiből ugyanaz az információ nyerhető, mint az eredetiből.*

Definíció

$\rho = (R_1, \ldots, R_k)$ az (R, F) séma felbontása, ha $R_i \subseteq R$ és $\cup_{i=1}^{k} R_i = R$.
Ha r egy (R, F) sémára illeszkedő reláció, akkor legyen $r_i = \pi_{R_i}(r)$ és

$$m_\rho(r) := r_1 \bowtie r_2 \bowtie \cdots \bowtie r_k$$

(Megj.: $\bowtie$ asszociatív, így nem kell a zárójelezéssel vesződni)

Kérdés: mikor nyerhető vissza az infó a felbontásból? Mi általában r és $m_\rho(r)$ viszonya?

Tétel

(i) $r \subseteq m_\rho(r)$
(ii) $r_i = \pi_{R_i}(m_\rho(r))$
(iii) $m_\rho\left(m_\rho(r)\right) = m_\rho(r)$

Bizonyítás

Bizonyítás.

Ha t egy sor, akkor $\pi_{R_i}(t)$ helyett $t[R_i]$-t írunk.

1. $r \subseteq m_\rho(r)$:
   Ha t egy sor r-ben, akkor t minden vetülete benne van a megfelelő $t[R_i]$-ben, ezek össze is illenek, így $m_\rho(r)$-ben is szerepelni fog t.
2. $r_i = \pi_{R_i}(m_\rho(r))$:
   $r \subseteq m_\rho(r) \implies r_i = \pi_{R_i}(r) \subseteq \pi_{R_i}(m_\rho(r))$.
   Ha $t \in m_\rho(r)$, akkor ez természetes illesztéssel jött létre, r_i-beli sorokból, így levetítve R_i-re épp r_i egy sorát kapjuk.
3. $m_\rho(m_\rho(r)) = m_\rho(r)$:
   $m_\rho(r) = \bowtie_{i=1}^{k} r_i = \bowtie_{i=1}^{k} \pi_{R_i}(r)$
   $m_\rho(m_\rho(r)) = \bowtie_{i=1}^{k} \pi_{R_i}(m_\rho(r)) \stackrel{(ii)}{=} \bowtie_{i=1}^{k} r_i = m_\rho(r)$

$\square$

Megjegyzés: (i) szerint a szétszedés és összerakás után vagy pont r-t kapom meg, vagy többet kapok, kevesebb sor nem lehet. Ha $r \neq m_\rho(r)$, akkor ez nem egy túl hasznos felbontás.
De ennél több is igaz: ebben az esetben teljesen reménytelen a felbontásból visszaszerezni r-t: mivel (ii) szerint r és $m_\rho(r)$ (függőleges) vetületei ugyanazok, ezért ha $r \neq m_\rho(r)$, akkor *van két olyan reláció (r és $m_\rho(r)$), aminek a vetületei ugyanazok $\Longrightarrow$ a vetületekből nem lehet visszaállítani r-et (nem lehet eldönteni, hogy r vagy $m_\rho(r)$ volt).*

Következmény: ha $r \neq m_\rho(r)$, akkor sehogyan se lehet visszahozni r-t a vetületekből.

Hűséges felbontás

Tehát az a kérdés, hogy mik azok a felbontásai egy (R, F) sémának, amik esetén tetszőleges (R, F)-re illeszkedő r relációra $r = m_\rho(r)$

Definíció

Adott (R, F). *Ennek* ρ *felbontása* ***hűséges (veszteségmentes, lossless)****, ha minden* (R, F)*-re illeszkedő* r *relációra* $r = m_\rho(r)$.

Példa: Legyen (R, F) a következő: $R(A, B, C)$, $F = \{C \to A\}$ és legyen r az alábbi reláció.

r	A	B	C
	a	c	e
	a	d	f
	b	c	g
	b	d	h

s	A	B
	a	c
	a	d
	b	c
	b	d

t	B	C
	c	e
	d	f
	c	g
	d	h

$s \bowtie t$	A	B	C
	a	c	e
	a	c	g
	a	d	f
	a	d	h
	b	c	e
	b	c	g
	b	d	f
	b	d	h

Ez a példa mutatja, hogy $r \neq s(A, B) \bowtie t(B, C)$, azaz ez a felbontás nem hűséges.
De $r = s'(A, C) \bowtie t'(B, C)$, majd látjuk.

Hűséges felbontás két részre

Hogyan biztosíthatja F, hogy a felbontás hűséges legyen?

Tétel

Az (R, F) séma $\rho = (R_1, R_2)$ felbontása hűséges $\Longleftrightarrow$ vagy

(a) $F \models R_1 \cap R_2 \rightarrow R_1 \setminus R_2$, *vagy*

(b) $F \models R_1 \cap R_2 \rightarrow R_2 \setminus R_1$.

Példa: R(TNÉV, TERMELŐ, ÁR, CÍM)

$F = \{$TERMELŐ $\rightarrow$ CÍM; TNÉV, TERMELŐ $\rightarrow$ ÁR$\}$

$\rho =$ (TERMELŐ, CÍM ; TNÉV, TERMELŐ, ÁR)

$R_1 \cap R_2 = \{$TERMELŐ$\}$, $R_1 \setminus R_2 = \{$CÍM$\}$, $R_2 \setminus R_1 = \{$TNÉV, ÁR$\}$

$\Longrightarrow$ (TERMELŐ)$^+(F) = \{$TERMELŐ, CÍM$\} \supseteq R_1 \setminus R_2 \Longrightarrow$ hűséges $\checkmark$

$\rho =$ (TNÉV, TERMELŐ; TNÉV, CÍM, ÁR)

$R_1 \cap R_2 = \{$TNÉV$\}$, $R_1 \setminus R_2 = \{$TERMELŐ$\}$, $R_2 \setminus R_1 = \{$CÍM, ÁR$\}$

$\Longrightarrow$ (TNÉV)$^+(F)$ nem tartalmazza egyiket sem $\Longrightarrow$ nem hűséges $\lightning$

Bizonyítás

Bizonyítás.

$\Longleftarrow$

Tegyük fel, hogy $F \models R_1 \cap R_2 \to R_1 \setminus R_2$, belátjuk, hogy a felbontás hűséges. (Ha a másik igaz, ugyanígy.)

Legyen r egy tetszőleges reláció, $s = m_\rho(r)$. Elég belátni, hogy $s \subseteq r$, hiszen $r \subseteq s$ mindig igaz. Azaz, lássuk be, hogy ha t sora s-nek, akkor r-nek is.

Ha t sora s-nek, akkor $\exists u_1, u_2$ sorai r-nek, hogy $t[R_1] = u_1[R_1]$ és $t[R_2] = u_2[R_2]$.

$\Longrightarrow u_1[R_1 \cap R_2] = t[R_1 \cap R_2] = u_2[R_1 \cap R_2]$

de ha két sor megegyezik a metszeten, akkor a feltétel miatt $R_1 \setminus R_2$-n is

$\Longrightarrow$ *egyeznek az egész R_1-en $\Longrightarrow$ u_2 és t egyeznek R_1-en.*

$\Longrightarrow$ *$t = u_2$, hiszen R_1-en a fenti miatt, R_2-n a feltevés miatt egyeznek.* $\surd$

$\Longrightarrow$ *Indirekt bizonyítunk. Tegyük fel, hogy sem (a), sem (b) nem igaz, azaz $R_1 \setminus R_2 \not\subseteq (R_1 \cap R_2)^+(F)$ és $R_2 \setminus R_1 \not\subseteq (R_1 \cap R_2)^+(F)$. Belátjuk, hogy ekkor ρ nem hűséges.*

Bizonyítás.

Adunk egy olyan (R, F) sémát, ahol sem (a), sem (b) nem áll fenn, és megmutatjuk, hogy ezen a felbontás nem hűséges.

Legyen r a következő reláció:

$\boxed{r}$

R_1

R_2

$(R_1 \cap R_2)^+(F)$

$R_1 \cap R_2$

t_1	0 0 0	1 1 1	. . . .	1 1 1	1 1 1
t_2	1 1 1	1 1 1	. . . .	1 1 1	0 0 0

A feltétel miatt a két szélső rész nem üres, ott nem egyezik meg a két sor.

r-ben igazak F függőségei (mint a teljességi tételnél).

Viszont $m_\rho(r) \supsetneq r$, hiszen $m_\rho(r)$-ben a csupa 1 sor is benne van. Tehát a felbontás nem hűséges. ↯

□

Hűségesség ellenőrzése általában

Adott (R, F) és $\rho = (R_1, \ldots, R_k)$, ahol $R = A_1, \ldots, A_n$.

Hogyan tudjuk eldönteni, hogy hűséges-e a felbontás?

Készítünk egy $k \times n$-es táblázatot:

	A_1	$\ldots$	A_j	$\ldots$	$A_{j'}$	$\ldots$	A_n
R_1							
$\vdots$							
R_i			a_j		$b_{ij'}$		
$\vdots$							
R_k							

- Kezdetben az (i, j) helyre a_j-t írunk, ha $A_j \in R_i$ és b_{ij}-t, ha $A_j \notin R_i$.
- Veszünk egy tetszőleges $X \to Y \in F$ függést.
  Ha két sor megegyezik X-en, akkor egyenlővé tesszük Y-on is az alábbi módon:
  - Ha valahol a_j és b_{ij} van, akkor a b_{ij}-t a_j-ra cseréljük.
  - Ha b_{kj} és b_{lj} van, akkor az egyiket átírjuk a másikra.
- Ezt minden függésre megcsináljuk tetszőleges sorrendben, szükség esetén többször is.

Jó a módszer?

Tétel

ρ pontosan akkor hűséges ha a végén lesz csupa a sor.

Nem bizonyítjuk.

Példa a táblázatos tesztre

$R(ABCD) \quad F = \{A \to C;\ C \to B;\ B \to D\}$
$R_1 = AB, R_2 = BC, R_3 = ACD \quad \rho = (R_1, R_2, R_3)$

	A	B	C	D
R_1	a_1	a_2	$b_{13} \to \boxed{a_3^*}$	b_{14}
R_2	b_{21}	a_2	a_3	b_{24}
R_3	a_1	$b_{32} \to \boxed{a_2^{**}}$	a_3	a_4

* $A \to C$ miatt
** $C \to B$ miatt

Lett csupa *a* sor $\Longrightarrow$ hűséges felbontás

Hűséges felbontás

Tétel

Adott (R, F), $\rho = (R_1, \dots, R_k)$ az R hűséges felbontása és $\sigma = (S_1, \dots, S_m)$ az R_1 hűséges felbontása (azaz R_1-et tovább bontjuk). Ekkor $\tau = (S_1, \dots, S_m, R_2, \dots, R_k)$ hűséges felbontása R-nek.

Bizonyítás.

Legyen r egy R-re illeszkedő reláció és ennek R_1-re eső vetülete legyen r_1. Tovább bontva r_1-et σ szerint kapjuk az $s_1, s_2, \dots, s_m$ vetületeket. Mivel σ hűséges, ezért $s_1 \bowtie s_2 \bowtie \cdots s_m = m_\sigma(r_1) = r_1$.
Mivel ρ is hűséges, ezért $r = m_\rho(r) = r_1 \bowtie r_2 \bowtie \cdots r_k$. Ebbe beírva r_1 helyére a σ hűségességéből kapott egyenlőséget, kapjuk, hogy $r = s_1 \bowtie s_2 \bowtie \cdots s_m \bowtie r_2 \bowtie \cdots r_k = m_\tau(r)$, azaz τ is hűséges. Itt persze használtuk $\bowtie$ asszociativitását. $\square$

Hűséges felbontás

Definíció

Ha egy σ felbontást a ρ felbontásból, úgy kapjuk, hogy néhány relációját felbontjuk, akkor ezt a következőképp jelöljük: $\sigma \supseteq \rho$.

Tétel

Ha ρ hűséges és $\sigma \supseteq \rho$ (σ-ban több komponens van), akkor σ is hűséges.

Bizonyítás.

$r \subseteq m_\sigma(r) \subseteq m_\rho(r) = r$

A középső tartalmazás azért igaz, mert a keresztszorzatból szigorúbb feltételek szerint válogatunk.

$\Longrightarrow r = m_\sigma(r) \quad \surd$ $\square$

Adatbáziskezelés

Normálformák, BCNF

Katona Gyula Y.

Számítástudományi és Információelméleti Tanszék
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Normálformák

Definíció

Egy $X \to Y$ függés triviális, ha $Y \subseteq X$. (Mert ezek a függések nem hordoznak sok infót, mindig igazak.)

Definíció (Boyce–Codd normálforma)

Az (R, F) relációs séma BCNF-ben van, ha tetszőleges nemtriviális $X \to A \in F^+$ függés esetén X szuperkulcs.

Azaz csak olyan függések vannak, hogy a szuperkulcs mindent meghatároz.

Normálformák

Tétel

Az (R, F) BCNF-ben van pontosan akkor ha tetszőleges $A \in R$-re és $X \subseteq R$ kulcsra igaz, hogy nincs olyan $Y \subseteq R$, amire $X \to Y \in F^+$; $Y \not\twoheadrightarrow X$; $Y \to A \in F^+$ és $A \notin Y$.
(Nincs tranzitív függés kulcstól.)

Bizonyítás.

Ha nincs BCNF-ben a séma, akkor van egy $Y \to A$ függés, ahol Y nem szuperkulcs és $A \notin Y$. Ekkor, tetszőleges X kulccsal: $X \to Y$, $Y \not\to X$, $Y \to A$, de $A \notin Y$, ami épp egy kulcstól való tranzitív függés.
Másrészt, ha van tranzitív függés kulcstól, azaz X olyan kulcs, amivel $X \to Y$, $Y \not\to X$, $Y \to A$, de $A \notin Y$, akkor $Y \to A$ egy olyan függés, ami sérti a BCNF tulajdonságot, mert Y nem lehet szuperkulcs, ha $Y \not\to X$. $\surd$ $\square$

Miért jó a BCNF séma?

Ha $C \to B$; $B \to A$ teljesülne, de $B \to C$ nem, akkor ugyanaz a B érték több C érték mellett is előfordulhatna, de minden példánynál ugyanazt az A értéket is tároljuk $\Longrightarrow$ **redundancia**.

Állítás

≤ 2 *attribútumos reláció mindig BCNF.*

Bizonyítás.

Ha $A \to B \implies A$ kulcs. Ha $B \to A \implies B$ kulcs. $\square$

Hogyan döntsük el, hogy egy (R, F) séma BCNF-e?

F^+ összes függését végig kellene nézni.

DE:

Miért jó a BCNF séma?

Tétel

Ha (R, F) nem BCNF, akkor van olyan $X \to Y \in \mathbf{F}$, amely jobboldalának valamely A attribútumára $X \to A$ nemtriviális és X nem szuperkulcs. (Az ilyen $X \to A \in F^+$.)

Bizonyítás.

Ha (R, F) nem BCNF, akkor van $U \to B \in F^+$, hogy U nem szuperkulcs és $B \notin U$.
$\implies B \in U^+(F) \implies U \subsetneq U^+(F)$
Az algoritmus, ami $U^+(F)$-et számolja, el tud indulni $\implies \exists V \to W \in F$, melyre $V \subseteq U$, $W \not\subseteq U \implies V \to W$ jó lesz $X \to Y$-nak.
Ugyanis V nem szuperkulcs, hiszen $V \subseteq U$ és U nem szuperkulcs.
$W \not\subseteq U \implies \exists A \in W \setminus U \subseteq W \setminus V$, így $V \to W$ nem triviális. $\square$

Ez jelentősen könnyíti az ellenőrzést, csak F függőségeit kell végignézni, nem F^+-ét.

Normalizálás

Tétel

Tetszőleges (R, F) sémának van hűséges felbontása BCNF relációkra.

Bizonyítás.

Elve:

- *Ha (R, F) BCNF* $\surd$
- *Ha nem, akkor két valódi (kisebb) részre bontjuk hűségesen* $\Longrightarrow (R_1, R_2)$
- *Ezt ismételjük (R_1, R_2)-re.*

Ez véget fog érni, mert ha már csak 2 attribútum marad valamelyikben, azt nem kell tovább bontani.
Hűséges lesz, mert láttuk, hogy ha egy hűséges felbontás egyik részét tovább bontjuk, akkor hűséges marad.

Bizonyítás

Bizonyítás.

Hogyan bontjuk fel 2 valódi részre, hűségesen?
Keresünk a felbontandó sémában egy olyan $X \to A \in F^+$-t, ami sérti a BCNF tulajdonságot $\implies$ A és X része a sémának, $A \notin X$ és X nem szuperkulcs

$$R_1 := XA, \qquad R_2 := R \setminus \{A\}$$

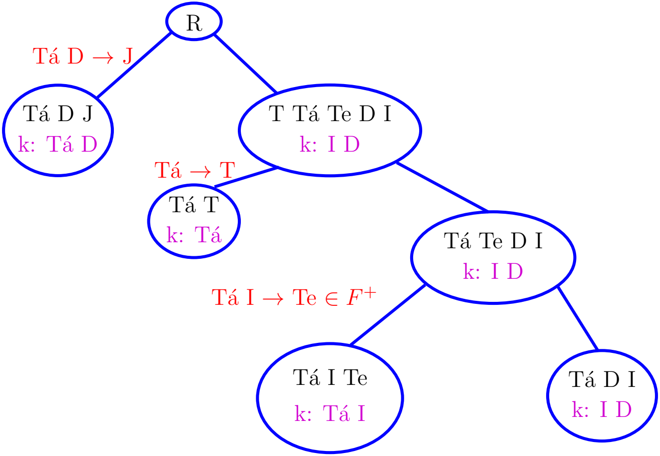
Ezek kisebbek: R_2 nyilván, R_1 pedig azért, mert ha $R_1 = R$ volna, akkor $X \to XA = R$ miatt X szuperkulcs lett volna.
Hűséges a felbontás: kétrészes teszttel $R_1 \cap R_2 = X \to A = R_1 \setminus R_2 \quad \surd$

$\square$

Miért lesz jobb ez a felbontás?
Az $X \to A$ függéssel nem lesz több probléma: R_2-ben nincs A, így nem lehet baj. R_1-ben viszont X szuperkulcs lesz.

Példa

R(**T**anár, **Tá**rgy, **Te**rem, **D**iák, **J**egy, **I**dő)
$F = \{\text{Tá} \to \text{T};\ \text{IT} \to \text{Te};\ \text{ID} \to \text{Te};\ \text{ID} \to \text{Tá};\ \text{TáD} \to \text{J}\}$ $\Longrightarrow$ kulcs csak ID



Megjegyzések

Minden felbontás után meg kell nézni, hogy a kapott relációk BCNF-ben vannak-e. Ehhez meg kell konstruálni F_S^+-et, ha S a vizsgált reláció: ez az F_R^+ azon függéseiből áll, amiknek mindkét oldala S-ben van. Ezeket a függéseket úgy kapjuk, hogy minden $X \subseteq S$ részhalmazra kiszámoljuk $X^+(F)$-et és $X \to Y$ pontosan akkor lesz benne F_S^+-ben, ha $Y \subseteq X^+(F) \cap S$.

Általában nem igaz, hogy elég F-ből kiválogatni azokat, amiknek mindkét oldala S-ben van.

Pl.: $F = \{\text{Tá} \to \text{T};\ \text{IT} \to \text{Te};\ \text{ID} \to \text{Te};\ \text{ID} \to \text{Tá};\ \text{TáD} \to \text{J}\}$

Ha $S =$ Tá Te D I, akkor (csak a nemtrivi függéseket felírva):

$F_S^+ = \{\text{Tá I} \to \text{Te};\ \text{D I} \to \text{Te Tá};\ \text{D I Tá} \to \text{Te};\ \text{D I Te} \to \text{Tá}\}$

$\Longrightarrow$ Az előző algoritmus lehet exponenciális $\Longrightarrow$ Van polinomiális algoritmus is.

3 attribútum esetén a BCNF tulajdonság csak úgy sérülhet, ha $X \to Y$, ahol X, Y egy-egy attribútum és X nem kulcs.

Azt is mindig ellenőrizni kell, hogy a kapott relációkban mik a (szuper)kulcsok, hogy egy függésről el tudjuk dönteni, hogy sérti-e a BCNF-et vagy nem. A példában ez viszonylag könnyű lesz, hiszen I és D egyik F-beli függőségben sem szerepel a jobb oldalon, így minden kulcs (amikor I és D szerepel a relációban) tartalmazza I D-t. Csak azt kell megnézni, hogy I D kulcs marad.

Függőség megőrzése

BCNF egy fogyatékossága: nehéz lehet ellenőrizni, hogy teljesülnek-e F függései (pl. beszúráskor). Ilyenkor a költséges $\bowtie$ kell, és ez sokszor előfordulhat.
Kéne egy olyan felbontás, amin könnyen lehet ellenőrizni a függéseket.

Definíció

Adott (R, F) séma és ennek egy $\rho = (R_1, \ldots, R_k)$ felbontása.

$$\pi_\rho(F) := \{X \to Y \in F^+ \mid \exists i \, (1 \leq i \leq k) \; X, Y \subseteq R_i\}^+$$

*az F **függéseinek vetítése a ρ felbontásra.** ρ **függőségőrző**, ha $\pi_\rho(F) = F^+$.*

Megjegyzés: $\pi_\rho(F) \subseteq F^+$ persze mindig igaz.
Ha a felbontás függőségőrző, akkor elég a darabokon ellenőrizni valamit, ami garantálja, hogy F minden függése fennmarad az egészen.

Példa

R(**V**áros, **U**tca, **I**rányítószám) $F = \{VU \to I;\ I \to V\}$

Ez nem BCNF $I \to V$ miatt.

Mire jó a függőségőrzés?:

Ha felbontjuk $\Longrightarrow S(V, I),\ Q(I, U)$

Beszúrunk 2-2 sort:

S	V	I
	Nagykanizsa	8800
	Nagykanizsa	8831

Q	U	I
	Kossuth	8800
	Kossuth	8831

Noha S-ben és Q-ban oké minden, $S \bowtie Q$-ban nem teljesül a $VU \to I$ függés.

Ez nem lett volna, ha függőségőrző lenne a felbontás.

Szomorú példa ez: semelyik felbontása sem őrzi meg $VU \to I$-t, mert csak ez olyan függés, aminek jobb oldalán van I, azaz ha egy felbontás függőségőrző lenne, akkor egy tagjában kéne VUI-nek lennie, de az nem lenne valódi felbontás.

$\Longrightarrow$ ennek nincs függőségőrző valódi felbontása, vagyis van olyan reláció, amit nem lehet függőségőrző módon BCNF-ekre szétszedni

Következmény

Állítás

Felbontás BCNF-be nem feltétlenül függőségőrző.

Kellene egy gyengébb normálforma. Ebben lehet valamennyi redundancia, de legyen függőségőrző.

Adatbáziskezelés

3NF

Katona Gyula Y.

Számítástudományi és Információelméleti Tanszék
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

3NF

Definíció

Az (R, F) séma A attribútuma ***prím*** *(elsődleges), ha szerepel valamelyik kulcsban.*

Szuperkulcsban minden szerepel, kulcs helyett szuperkulccsal nem lenne sok értelme az előbbi definíciónak.

Definíció

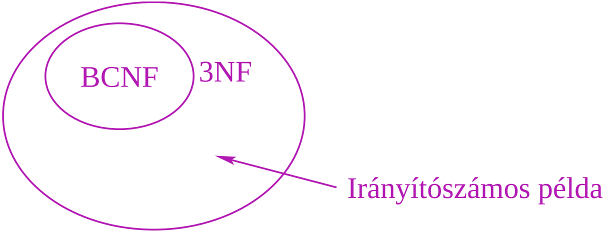
Az (R, F) séma ***3NF*** *(harmadik normálformájú), ha tetszőleges nemtriviális $X \to A \in F^+$ függés esetén vagy X szuperkulcs vagy A prímattribútum.*

Következmény

Minden BCNF séma egyben 3NF is.

3NF

3NF lehet redundáns, de nem nagyon.



Tétel

Ha (R, F) egy 3NF séma, akkor minden nem prím A attribútumra és $X \subseteq R$ kulcsra igaz, hogy nincs olyan Y, hogy $X \to Y$, $Y \not\to X$, $Y \to A$ és $A \notin Y$. (Nem-elsődleges attribútum nem függ tranzitíven kulcstól.)

Nem bizonyítjuk, úgy menne, mint BCNF-nél a hasonló állítás.

3NF tulajdonság ellenőrzése

Hogyan tudjuk ellenőrizni, hogy egy séma 3NF-ben van-e?

Állítás

$\leq$ 2 attribútumos reláció mindig 3NF.

Bizonyítás.

Már láttuk, hogy BCNF $\Longrightarrow$ 3NF $\square$

Most is F^+ összes függőségét végig kellene nézni.

DE:

3NF tulajdonság ellenőrzése

Tétel

Ha (R, F) nem 3NF, akkor van olyan $X \to Y \in \mathbf{F}$, amely jobboldalának valamely A attribútumára $X \to A$ nemtriviális, X nem szuperkulcs és A nem prím. (Az ilyen $X \to A \in F^+$.)

Nem bizonyítjuk.

Azt tudjuk ellenőrizni egy adott $X \to A$ függésre, hogy X szuperkulcs-e: kiszámítjuk $X^+(F)$-et.
De hogyan ellenőrizzük, hogy A prím-e? $\Longrightarrow$ kell az **összes** kulcs

Tétel

Annak eldöntése, hogy egy attribútum prím-e, NP-teljes probléma.

Következmény

Annak eldöntése, hogy egy séma 3NF-ben van-e, NP-teljes probléma.

3NF tulajdonság ellenőrzése

Persze olyan algoritmus van, ami legrosszabb esetben exponenciális:

- Meghatározzuk az összes kulcsot.
- Meghatározzuk az összes prímattribútumot.
- Minden F-beli $X \to Y$ függésre nézzük meg:
  - Igaz-e, hogy $Y \subseteq X$. Ha igen, a függés triviális. $\surd$
  - Igaz-e, hogy X kulcs-e. Ha igen, nem sérti a feltételt. $\surd$
  - Igaz-e, hogy Y-ben csak prímattribútumok vannak. Ha igen, nem sérti a feltételt. $\surd$

  Ha egyik sem, akkor van olyan függés, ami sérti a feltételt $\Longrightarrow$ nem 3NF

3NF felbontás

Tétel

Tetszőleges (R, F) sémának van hűséges és függőségőrző felbontása 3NF sémákra.

Definíció

A G függéshalmaz az F függéshalmaz ***fedése*** *ha $G^+ = F^+$. (Persze ilyenkor F is fedése G-nek.)*

Definíció

A G függéshalmaz az F függéshalmaz ***minimális fedése****, ha egyrészt fedése, másrészt*

1. *a G-beli függések $X \to A$ alakúak, ahol $A \notin X$*
2. *G-ből nem hagyható el függés: $(G \setminus \{X \to A\})^+ \subsetneq G^+$*
3. *G-beli függések baloldalai minimálisak: $Y \subsetneq X$ $\Longrightarrow (G \setminus \{X \to A\} \cup \{Y \to A\})^+ \subsetneq G^+$*

3NF felbontás

Állítás

Tetszőleges F-nek van minimális fedése.

Bizonyítás.

Algoritmust adunk, külön gondoskodunk minden pont teljesítéséről.
(1) $X \to Y \in G$, $Y = A_1 \dots A_k \implies$ minden $X \to A_i$-t beveszünk, ha $A_i \notin X$.
(2) Minden $X \to A \in G$ függésre kiszámoljuk $Y := X^+(G \setminus \{X \to A\})$-t. Ha $A \in Y$, akkor $X \to A$ elhagyható, különben nem.
(3) Ellenőrizni kell, hogy $X \to A$ baloldala minimális-e. X minden B elemére kiszámoljuk $Y := (X \setminus \{B\})^+(G)$-t. Ha $A \in Y$, akkor $X \to A$ helyett vegyük be $X - \{B\} \to A$-t. Ha egyik B-re se lesz ilyen, akkor X minimális.
Megjegyzés: És persze a fenti három lépés során a függéshalmaz lezártja nem változik. □

Példa

$R = (A, B, C, D) \qquad F = \{AB \to CD;\ AC \to BD;\ C \to A;\ C \to B\}$

(1) $F' = \{AB \to C;\ AB \to D;\ AC \to B;\ AC \to D;\ C \to A;\ C \to B\}$

(2) $C \to B$ miatt $AC \to B$ elhagyható és $AB \to C$ és $AC \to D$ miatt $AB \to D$ elhagyható, de más nem, ezt végig lehet nézni.

$F' = \{AB \to C;\ AC \to D;\ C \to A;\ C \to B\}$

(3) $C \to A$ miatt $AC \to D$ baloldaláról A elhagyható.

$F'' = \{AB \to C;\ C \to D;\ C \to A;\ C \to B\}$

Ez már minimális fedés.

A minimális fedés nem feltétlenül egyértelmű!

Példa: $R(A, B, C) \qquad F = \{AB \to C;\ A \to B;\ B \to A\}$ esetén jó minimális fedés lesz

$G_1 = \{B \to C;\ A \to B;\ B \to A\}$ és

$G_2 = \{A \to C;\ A \to B;\ B \to A\}$ is.

Bizonyítás

Tétel

Tetszőleges (R, F) sémának van hűséges és függőségőrző felbontása 3NF sémákra.

Bizonyítás.

Vegyük F egy minimális fedését: $G = \{X_1 \to A_1, \ldots, X_k \to A_k\}$

Legyen X egy kulcs és $\rho = (X, X_1A_1, \ldots, X_kA_k)$ egy felbontás. $\Longrightarrow R_0, R_1, \ldots, R_k$

Állítás: ez függőségőrző lesz, a tagok 3NF-ek és a felbontás hűséges.

ρ **függőségőrző:** $F^+ = G^+$ és minden G-beli $X \to A_i$ függés benne lesz R_i-ben (ott ellenőrizhető).

R_0 **3NF:** R_0-ban nincs nemtriviális függés, mert különben X nem lenne kulcs, csak szuperkulcs $\Longrightarrow R_0$ BCNF $\Longrightarrow$ 3NF

Többi R_i is 3NF: tegyük fel, hogy nem az $\Longrightarrow \exists\, U \to B$ nemtriviális függés, hogy U nem szuperkulcs R_i-ben és B nem prímattribútum R_i-ben.

Ha $B = A_i$, akkor $U \subseteq X_i$, de $U \neq X_i$, hiszen akkor U szuperkulcs lenne R_i-ben.
$\Longrightarrow U \subset X_i \Longrightarrow X_i \to A_i$ baloldala csökkenthető G-ben U-ra. Ellentmondás, mert akkor G nem volt minimális fedés.

Ha $B \neq A_i \Longrightarrow B \in X_i$ és B nem prím R_i-ben $\Longrightarrow X_i$ nem kulcs R_i-ben (de szuperkulcs) $\Longrightarrow \exists\, Y \subsetneq X_i$ kulcs R_i-ben $\Longrightarrow Y \to A_i$ fennáll $\Longrightarrow X_i \to A_i$ baloldala csökkenthető G-ben Y-ra, megint csak ellentmondás.

ρ **hűséges:** A táblázatos módszer alkalmazásával könnyen látható. $\square$

Megjegyzés: Előfordulhat, hogy valamelyik X_iA_i már tartalmaz kulcsot. Ilyenkor a $\rho = \{X_1A_1, \ldots, X_kA_k\}$ is jó felbontás már.

Megjegyzés: 2NF már nem érdekes, 1NF kicsit érdekes, de nem foglalkozunk vele.

Példa: 3NF-re bontás

$R = (A, B, C, D, E) \qquad F = \{AE \rightarrow BC;\ AC \rightarrow D;\ CD \rightarrow BE;\ D \rightarrow E\}$

Ez nem 3NF, mert a kulcsok:

semelyik egyelemű halmaz nem kulcs (csak D lehetne, de az ő lezártja csak DE), viszont kételeműek közül szuperkulcs lesz AC, AD, AE (A-nak benne kell lennie minden kulcsban, mert A nincs jobboldalon), AB viszont nem szuperkulcs.

Ezek kulcsok is lesznek, mert egyik egyelemű se volt kulcs.

Más kulcs nincs is, mert ha lenne legalább háromelemű halmaz, aminek a lezártja az egész, akkor abban A biztos benne van és legalább C vagy D vagy E is benne van, de akkor az már csak szuperkulcs lehet, mert tartalmaz kulcsot.

Innen látszik, hogy a prímattribútumok: A, C, D, E, vagyis B nem az.

Példa: 3NF-re bontás (folyt.)

$R = (A, B, C, D, E) \qquad F = \{AE \to BC;\ AC \to D;\ CD \to BE;\ D \to E\}$

Tehát a $CD \to B$ függés rossz a 3NF szempontjából, mert CD nem szuperkulcs és B nem prím.

Csináljunk hát egy 3NF-ekre való függőségőrző, hűséges felbontást.

(1) $F' = \{AE \to B;\ AE \to C;\ AC \to D;\ CD \to B;\ CD \to E;\ D \to E\}$

(2) $AE \to C, AC \to D, CD \to B$ miatt $AE \to B$ elhagyható és $D \to E$ miatt $CD \to E$ is elhagyható, de más nem, ezt végig lehet nézni (mert például AE-nek a maradék függésekre vett lezártjában nincsen benne C).

$F'' = \{AE \to C;\ AC \to D;\ CD \to B;\ D \to E\}$

(3) Semelyik baloldal nem csökkenthető, mert például A lezártjában nincsen benne C, és a többi is ugyanígy látszik. Vagyis F'' már minimális fedés.

A minimális fedés alapján a jó felbontás:

(AEC, ACD, CDB, DE) mivel kulcsot nem is kellett hozzávennünk, mert az már benne van az egyik tagban (pl. AE az elsőben).

Többértékű függés

A legfontosabb a funkcionális függés, de vannak másféle függések is.
Motiváló példa: R(Név, Tantárgy, Gyereknév)

Név	Tantárgy	Gyereknév
Katona	Algel	Dani
Katona	Adatbázis	Lilla
Katona	Algel	Lilla
Katona	Adatbázis	Dani

Ez BCNF, de mégis redundáns, mert ha valamelyik tárgynál szerepel egy gyereknév, akkor az összes többinél is szerepelnie kell. (Pl. beszúrni nehéz, mert amikor egy sort beszúrok, figyelni kell arra, hogy egy másikat is beszúrjak.)
Jobb lenne tárolni (Név, Tantárgy) és (Név, Gyereknév) felbontásban.
Ok: a Tantárgy és a Gyereknév független (minden kombinációban előfordulnak)
$\Longrightarrow$ ha látjuk az első két sort, tudjuk, hogy a másik kettő is ott van.

Adatbáziskezelés

Többértékű függés, 4NF

Katona Gyula Y.

Számítástudományi és Információelméleti Tanszék
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Többértékű függés

Definíció

Az X attribútumhalmaztól ***többértékűen függ*** *az Y attribútumhalmaz az r relációban (jele: $X \twoheadrightarrow Y$), ha tetszőleges $t_1, t_2 \in r$ sorokra, melyekre $t_1[X] = t_2[X]$, létezik $t_3, t_4 \in r$, melyekre*

- $t_3[XY] = t_1[XY]$
- $t_3[R \setminus XY] = t_2[R \setminus XY]$
- $t_4[XY] = t_2[XY]$
- $t_4[R \setminus XY] = t_1[R \setminus XY]$

	$\overbrace{\ldots\ldots\ldots}^{X}$	$\overbrace{\ldots\ldots\ldots}^{Y}$	$\overbrace{\ldots\ldots\ldots}^{R \setminus XY}$
t_1	*AAAAAAA*	*BBBBBBB*	*CCCCCCC*
t_2	*AAAAAAA*	*DDDDDDD*	*EEEEEEE*
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
t_3	*AAAAAAA*	*BBBBBBB*	*EEEEEEE*
t_4	*AAAAAAA*	*DDDDDDD*	*CCCCCCC*

Többértékű függések levezetése

Definíció

Triviális többértékű függések *(amik mindig igazak)*:

- $Y \subseteq X \implies X \twoheadrightarrow Y$, *mert* $t_3 = t_2$ *és* $t_4 = t_1$ *jó lesz.*
- $XY = R \implies X \twoheadrightarrow Y$, *mert* $t_3 = t_1$ *és* $t_4 = t_2$ *jó lesz.*

Ezentúl a többértékű függések is a séma részei lesznek és definiálhatjuk a levezethetőséget ($\vdash$) és a logikai következményt ($\models$) úgy, hogy funkcionális függőségek és többértékű függőségek is vannak F-ben.

Logikai következmény: egy F (funkcionális és többértékű függéseket is tartalmazó) függéshalmaznak logikai következménye egy (funkcionális vagy többértékű) függés, ha minden olyan relációban, amiben F minden függése fennáll, fenn kell hogy álljon a mondott függés is.

Levezetés: Armstrong-axiómák (a funkcionális függésekre) és 5 új axióma, amiben $\rightarrow$ és $\twoheadrightarrow$ is van. Amilyen függés ezekkel előáll F-ből, arra mondjuk, hogy levezethető.

Hasonló elmélet, mint $\rightarrow$-nél $\implies$ belátható, hogy $\vdash \sim \models$ itt is igaz lesz.

Többértékű levezetési szabályok

Két fontos új szabály

- $X \to Y \vdash X \twoheadrightarrow Y$, mert $t_3 = t_2$ és $t_4 = t_1$ jó lesz.
- $X \twoheadrightarrow Y \vdash X \twoheadrightarrow R \setminus XY$, mert $t_3' = t_4$ és $t_4' = t_3$ jó lesz.
- De pl. $X \twoheadrightarrow AB \nvdash X \twoheadrightarrow A$, nem szétvágható. (Sok minden máshogy van a többértékű függéseknél.)

Tétel

Legyen $\rho = (R_1, R_2)$ az (R, F) séma felbontása, ahol F most funkcionális és többértékű függéseket is tartalmaz. ρ akkor és csak akkor hűséges felbontás, ha $R_1 \cap R_2 \twoheadrightarrow R_2 \setminus R_1$.

Megjegyzés: Nem kell a „vagy $R_1 \cap R_2 \twoheadrightarrow R_1 \setminus R_2$” a fenti 2. szabály miatt, mert ha $R_1 \cap R_2 \twoheadrightarrow R_1 \setminus R_2$ igaz, akkor $R_1 \cap R_2 \twoheadrightarrow R \setminus (R_1 \setminus R_2)$ is igaz, ebből meg már következik $R_1 \cap R_2 \twoheadrightarrow R_2 \setminus R_1$.
a tétel bizonyítása hasonló, mint a funkcionális függésnél, de nem bizonyítjuk.

4NF

Cél: olyan normálforma, amiben többértékű függés miatt sincs redundancia.
BCNF mintájára:

Definíció

*Az (R, F) séma **4NF (negyedik normálformájú)**, ha tetszőleges nemtriviális $X \twoheadrightarrow Y \in F^+$ esetén X szuperkulcs (a szuperkulcsot a régi értelemben, csak funkcionális függőségekkel definiálva).*

4NF

Következmény

Ha egy séma 4NF, akkor BCNF is.

Bizonyítás.

Indirekt tegyük fel, hogy létezik olyan $X \to A \in F^+$ nemtriviális függés, ahol X nem szuperkulcs. $\Longrightarrow$ Ekkor $\lightning$, amiatt, hogy $X \to A$-ból következik, hogy $X \twoheadrightarrow A$. $\square$

Megjegyzések:

- Ha F-ben csak funkcionális függőségek vannak, akkor 4NF=BCNF
- 2 attribútumos reláció mindig 4NF, hiszen nincs nemtriviális többértékű függés, azt meg már láttuk, hogy ha csak funkcionális függések vannak, akkor a BCNF-ség rendben van kétattribútumos relációnál.
- Van olyan reláció, ami BCNF, de nem 4NF (a korábbi gyerekes példa, mert ott a Név nem szuperkulcs)

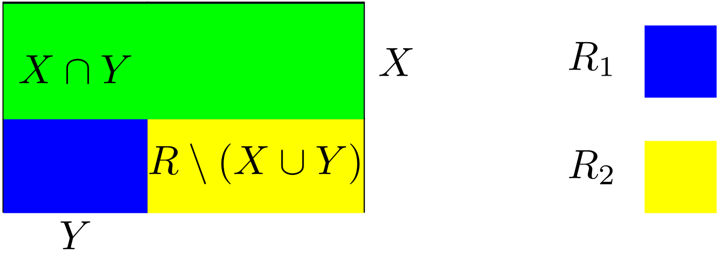
4NF

Tétel

Legyen (R, F) egy séma, ahol F funkcionális és többértékű függések halmaza. Ekkor (R, F) felbontható hűségesen 4NF relációkra.

Algoritmus: Hasonlóan BCNF-hez, mindig két valódi részre bontjuk hűségesen, addig, amíg mindegyik rész 4NF nem lesz.
Keresünk egy $X \twoheadrightarrow Y$ függést, ami megsérti a 4NF feltételt.
(Ha van $\rightarrow$, ami megsérti, akkor van $\twoheadrightarrow$ is.)
Nem tanuljuk, hogy ezt hogy kell általában, mert bonyolult, de ha nem kell keresni, mert ott van, akkor meg tudjuk csinálni.

$R_1 = XY \qquad R_2 = R \setminus (Y \setminus X) \ (= X \cup (R \setminus Y))$



Példa

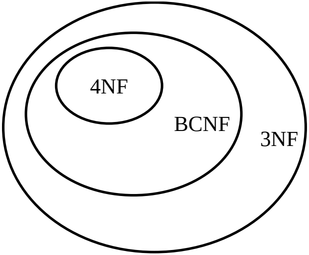
R(Színész, Város, Utca, Filmcím, Filmév)

$F = \{\text{Színész} \twoheadrightarrow \text{Város, Utca}\}$

Ez megsérti a 4NF tulajdonságot, ha Színész nem szuperkulcs.

4NF felbontás: $R_1 =$(Színész, Város, Utca) $R_2 =$(Színész, Filmcím, Filmév)

Normálformák összefoglalása



Jellemzők	3NF	BCNF	4NF
Megszünteti a funkcionális függőségekből eredő redundanciát	Gyakran	Igen	Igen
Megszünteti a többértékű függőségekből eredő redundanciát	Nem	Nem	Igen
Az ilyen felbontás megőrzi a funkcionális függőségeket	Igen	Lehet	Lehet
Az ilyen felbontás megőrzi a többértékű függőségeket	Lehet	Lehet	Lehet

Fontos elv: Ne bontsuk tovább, amit már nem muszáj.

A normalizálás azért fontos, mert . . .