Bevezetés a Számításelméletbe II.

9. gyakorlat

1. Milyen maradékot ad

a) 50^{50} 11-gyel osztva;
b) 2^{100} 45-tel osztva;
c) $11^{11^{11}}$ 7-tel oszva?
d) 99! 101-gyel osztva?

2. Mi az utolsó két számjegye az alábbi számoknak?

a) 303^{404}
b) $49^{49^{50}}$
c) $17^{17^{17}} - 17^{17} + 17$ (ZH, 2003. május 22.)
d) $99! + 1$

3. Tekintsük azt a számtani sorozatot, amelynek első tagja 32, differenciája 51. (A sorozat tagjai tehát: $32, 83, 134, \ldots$) Milyen maradékot ad a sorozat első 32 tagjának szorzata 51-gyel osztva? (ZH, 2005. május 5.)

4. Döntsd el az alábbiakban megadott halmazokról és a rajtuk értelmezett műveletekről, hogy

(i) a művelet asszociatív-e;
(ii) van-e egységelem;
(iii) mely elemeknek van inverze;
(iv) csoportot alkot-e a halmaz a művelettel?

(a) mod m maradékosztályok; mod m összeadás.
(b) mod p maradékosztályok a 0-t kivéve; mod p szorzás.
(c) a síkvektorok halmaza; a síkvektorok összeadása.
(d) egy tetszőleges X halmaz összes részhalmazainak halmaza; a halmazok uniója.
(e) egy tetszőleges X halmaz összes részhalmazainak halmaza; a halmazok szimmetrikus differenciája. (Az A és B halmazok szimmetrikus differenciája alatt definíció szerint az $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ halmazt értjük.)
(f) az egész számok $\mathbb{Z}$ halmaza; az $a * b = a + b + 1$ képlettel megadott művelet.

5. Bizonyítsd be, hogy csoportban mindig megoldható az $a \cdot x = b$ egyenlet! (Ez tehát azt jelenti, hogy egy tetszőleges G csoport minden a és b eleméhez található a csoportnak olyan x eleme, amelyre $a \cdot x = b$ teljesül.)

6. Bizonyítsd be, hogy tetszőleges G csoport minden $a, b \in G$ elemeire $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$.

7. Legyen G egy olyan csoport, amelyben minden elem négyzete (vagyis önmagával vett szorzata) az egységelem. Bizonyítsd be, hogy G Abel-csoport!

8. Döntsd el, hogy a megadott halmazok a rajtuk értelmezett művelettel csoportot alkotnak-e?

a) a $H = \{\text{tik}, \text{tak}\}$ halmaz; az $x * y = \begin{cases} \text{tik}, & \text{ha } x = y \\ \text{tak}, & \text{ha } x \neq y \end{cases}$ utasítással megadott művelet.
b) a (-1)-től különböző valós számok halmaza; az $a * b = a \cdot b + a + b$ képlettel megadott művelet.
c) az $n \times n$-es, 1 determinánsú (valós) mátrixok halmaza; a mátrixszorzás.

9. A G véges Abel-csoport összes elemét összeszorozzuk valamilyen sorrendben. Bizonyítsd be, hogy eredményül G-nek olyan elemét kapjuk, amelynek az inverze önmaga!

10. Csoportot alkotnak-e a szokásos szorzásra a valós és tiszta képzetes komplex számok a 0 nélkül, azaz csoport-e $(X, \cdot)$, ahol $X = \{a \in \mathbb{R} : a \neq 0\} \cup \{ai : 0 \neq a \in \mathbb{R}\}$, ill. $\cdot$ a komplex számokon értelmezett szokásos szorzást jelöli? (ZH, 2006. május 4.)

11. A H halmaz álljon a 900 összes pozitív osztójából. Értelmezzük H-n a $*$ műveletet úgy, hogy $a, b \in H$ esetén $a * b$ meghatározásához először a-t és b-t (hagyományos értelemben) összeszorozzuk, majd az eredmény prímtényezős felbontásában minden prím kitevőjét helyettesítjük a 3-mal vett osztási maradékával. (Így például $36 * 60 = 10$.) Döntsük el, hogy H csoportot alkot-e a $*$ műveletre nézve! (ZH, 2005. május 5.)

http://www.albinoblacksheep.com/games/bloxorz