Bevezetés a Számításelméletbe II.

8. gyakorlat

1. Határozzuk meg a $10x \equiv 24 \pmod m$ lineáris kongruencia megoldásait modulo m, ahol
(a) $m = 15$ ill.
(b) $m = 16$. (ZH 2008. április 23.)

2. Határozzuk meg az összes olyan n egész számot, amelyre

$$5^n \equiv 3^n + 8 \pmod{26}$$

teljesül! (ZH, 2005. május 5.)

3. Bizonyítsuk be, hogy ha $(a, m) \equiv 1$, $(b, m) \equiv 1$ és $ax \equiv b$ (mod m) valamint $by \equiv a$ (mod m), akkor $xy \equiv 1$ (mod m). (ZH 2006. május 4.)

4. Oldd meg az alábbi lineáris kongruenciákat!

a) $5x \equiv 2 \quad (11)$ b) $26x \equiv 16 \quad (34)$
c) $104x \equiv 74 \quad (60)$ d) $40x \equiv 28 \quad (62)$

5. Milyen maradékot adhat egy egész szám 92-vel osztva, ha az 54-szerese 24 maradékot ad 92-vel osztva? (ZH, 2003. április 30.)

6. a) Egy százlábú meg akarja számolni a lábait. Azt tudja biológiából, hogy minden százlábúnak legföljebb 344 lába van. Ha 13-asával számolja a lábait, akkor 3 marad ki, ha 17-esével számolja, akkor viszont 10 marad ki. Hánylábú a százlábú?

b) Egy másik százlábú is megirigyli ezt a módszert. Neki 16-osával számolva 5 marad ki, 20-asával számolva pedig 15 marad ki. Bizonyítsd be, hogy elszámolta magát!

c) A százlábúak királyához is eljut a módszer. Neki 6-osával számolva 5 marad ki, 7-esével számolva 6, 8-asával számolva pedig 7. Neki hány lába van?

7. Mutassuk meg, hogy $61! + 1$ osztható 71-gyel! (ZH, 2002. május 2.)

8. Határozzuk meg az x kétjegyű egész számot, ha tudjuk, hogy $34x + 5$ utolsó két számjegye, valamint $17x + 10$ utolsó két számjegye megegyezik. (ZH, 2005. május 5.)

9. Tekintsük azt a számtani sorozatot, amelynek első tagja 32, differenciája 51. (A sorozat tagjai tehát: $32, 83, 134, \ldots$) Milyen maradékot ad a sorozat első 32 tagjának szorzata 51-gyel osztva? (ZH, 2005. május 5.)

10. a) Milyen számok állíthatók elő $20x + 51y$ alakban, ahol x és y egész számok?

b) Milyen számok állíthatók elő $170x + 51y$ alakban, ahol x és y egész számok?

c) Milyen számok állíthatók elő $21x + 33y + 77z$ alakban, ahol x, y és z egész számok?

11. Bizonyítsuk be, hogy $1 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 55 \cdot 73 \cdot \ldots \cdot 271 + 1$ osztható 17-tel! (ZH, 1998. július 2.)

12. Pataki Ferenc fejszámolóművész egyszer a tévében a következő trükköt mutatta be: felkért a közönségből valakit, hogy gondoljon egy háromjegyű számra, szorozza meg 6561-gyel, majd az eredmény utolsó három jegyét közölje. Ebből ő pillanatok alatt kitalálta a gondolt számot. Hogyan csinálta? Utána tudnád-e csinálni, ha használhatsz számológépet, de csak nagyon rövid ideig?

The Perry Bible Fellowship… http://pbfcomics.com/