

Bevezetés a Számításelméletbe II.

7. gyakorlat

1. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok pozitív egész n esetén teljesül, hogy $29|23n+6$. (ZH 2008. április 23.)

2. Legyen n páratlan egész szám, amely nem osztható egyetlen prímszám négyzetével sem. Bizonyítsuk be, hogy n pozitív osztóinak átlaga egész szám! (ZH, 2003. április 30.)

3. Milyen maradékot ad

a) 100^{100} 11-gyel osztva;

b) $65^{63^{61}}$ 66-tal osztva;

c) 41^{41} 35-tel osztva?

4. Mi az utolsó két számjegye az alábbi számoknak?

a) 2001^{2007}

b) $99^{77^{55}}$

c) 51^{151}

5. a) Egy perzsa sahnak 100 felesége van, a börtönében is épp 100 rab sínylődik, 1-től 100-ig számozott cellákban. A börtöncellák zárjai „kétállásúak”: ha egyet fordítanak rajtuk, a bezárt ajtó kinyílik, a nyitott ajtó bezáródik. A sah születésnapján a 100 feleség végigvonul a börtönön és a zárossal játszanak. Az első feleség minden záron egyet fordít, a második feleség minden második ajtó zárján egyet fordít, stb., a k -edik feleség minden k -edik ajtó zárján egyet fordít, egészen a 100. feleségig. Végül azok a rabok, akiknek az ajtaja nyitva van, kiszabadulnak. Milyen sorszámú cellákban laknak a szerencsések?

b) A sah következő születésnapján a feleségek megint rosszkednek. Most az első feleség minden záron egyet fordít, a második feleség minden második ajtó zárján kettőt fordít, stb., a k -edik feleség minden k -edik ajtó zárján k -t fordít, egészen a 100. feleségig. Most milyen sorszámú cellák lakói szabadulnak?

6. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a, b, c, d, e és f egész számokra

$$(a + b, c + d, e + f) | ace + bdf$$

teljesül (ahol a gömbölyű zárójel a legnagyobb közös osztót jelöli).

7*. Mely természetes számoknak van olyan többszöröse, ami csak 0 és 1 számjegyeket tartalmaz?

Feketén-fehéren... <http://www.nitrome.com/games/yinyang/>