Bevezetés a Számításelméletbe II.

11. gyakorlat

1. Értelmezzük az egész számok $\mathbb{Z}$ halmazán az $a * b = a + b + 1$ képlettel megadott műveletet. Milyen korábbról már ismert csoporttal izomorf a $(\mathbb{Z}, *)$ csoport?

2. Végezd el az alábbi műveleteket az S_n szimmetrikus csoportban. Add meg az eredmény ciklusfelbontását és határozd meg a rendjét!

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

b) $(35)(1432)(35)(1234)$

c) $[(134)(342)]^{-1}$

d) $[(34)(23)(12)]^{2009}$

3. Határozd meg a megadott G csoportokban a H részcsoport szerinti baloldali- és jobboldali mellékosztályokat!

a) G az egész számok az összeadással; H a páros számok.

b) G a síkvektorok a vektorösszeadással; H azokból a vektorokból áll, amelyeknek a második koordinátája háromszorosa az elsőnek.

c) G a nemnulla valós számok a szorzással; $H = \{-1, 1\}$.

d) G a nemnulla determinánsú $n \times n$-es mátrixok a mátrixszorzással; H az 1 determinánsú mátrixok.

e) $G = S_3$; $H = \{I, (12)\}$.

4. Legyen G egy n-elemű csoport (n pozitív egész szám) és L ennek egy 5 elemű részcsoportja. Bizonyítsuk be, hogy ekkor tetszőleges $h \in L$ elemre fennáll, hogy $h^{10} = e$, ahol e a G csoport egységeleme. (ZH, 2004. április 29.)

5. Határozzuk meg az

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 8 & 7 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

elem rendjét az S_8 szimmetrikus csoportban! (ZH, 2003. május 15.)

6. Döntsd el, hogy a megadott csoportokban baloldali mellékosztályt alkotnak-e (valamilyen részcsoport szerint) a megadott részhalmazok.

a) az egész számok csoportja az összeadással; a $8k + 5$ ($k \in \mathbb{Z}$) alakú egészek.

b) az egész számok csoportja az összeadással; a prímszámok.

c) S_n; azok a permutációk, amik 1-hez 2-t rendelnek.

7. Legyen $G_1 = (\mathbb{Q}, +)$ a racionális számok halmazán a (szokásos) összeadással vett csoport és legyen $G_2 = (\mathbb{Q}^+, \cdot)$ a pozitív racionális számok halmazán a (szokásos) szorzással vett csoport. Döntsük el, hogy G_1 izomorf-e G_2-vel! (ZH, 2005. május 19.)

8. a) Bizonyítsd be, hogy az S_n csoport minden eleme felírható néhány kételemű ciklus szorzataként! (Itt a felírásban a ciklusoknak természetesen nem kell diszjunktnak lenni.)

b) Bizonyítsd be, hogy az S_n csoport minden eleme felírható egy olyan szorzat eredményeként, amelynek minden tagja az (12) vagy az $(12\ldots n)$ ciklus valamelyike.

http://www.beksinski.pl