Bevezetés a Számításelméletbe II.

10. gyakorlat

1. Határozd meg a D_8 diédercsoportban az alábbi elemek rendjét!

a) f_{45}
b) $f_{90} \cdot t_1$
c) f_{90}
d) f_{135}

2. A G csoport $g \in G$ elemére $o(g) = 10$. Mennyi $o(g^3)$ értéke?

3. Egy csoport rendje 81 és van olyan eleme, aminek a 27. hatványa nem az egységelem. Bizonyítsd be, hogy a csoport Abel-csoport!

4. A valós számsorozatok halmaza csoportot alkot a számsorozatok összeadására, mint műveletre nézve (ezt könnyű ellenőrizni). Döntsd el, hogy az alábbi részhalmazok részcsoportot alkotnak-e ebben a csoportban?

a) a konvergens számsorozatok halmaza;
b) a divergens számsorozatok halmaza;
c) a korlátos számsorozatok halmaza;
d) a monoton növő számsorozatok halmaza.

5. Igazold, hogy egy páratlan rendű Abel-csoportban az összes elem szorzata az egységelem.

6. A H halmaz álljon az összes olyan rendezett számpárból, amelynek az első tagja egész szám, a második tagja 0 vagy 1. (Azaz: $H = \{(a, b) | a \in \mathbb{Z}, b \in \{0, 1\}\}$.) Értelmezzük H-n a $\oplus$ műveletet a következőképpen:

$$(a_1, b_1) \oplus (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, (b_1 + b_2) \bmod 2).$$

(Azaz: a számpárokat tagonként összeadjuk és az eredmény második tagjának 2-es maradékát vesszük. Például: $(7, 1) \oplus (12, 1) = (19, 0)$.)

a) Bizonyítsuk be, hogy H csoportot alkot a $\oplus$ műveletre nézve!
b) Milyen rendű elemek fordulnak elő H-ban?
c) Ciklikus csoport-e H?
(ZH, 2003. május 15.)

7. Tegyük fel, hogy G egy 49-elemű csoport és H_1, illetve H_2 a G valódi részcsoportjai. Bizonyítsuk be, hogy $|H_1| = |H_2|$ teljesül! (Egy G csoport valódi részcsoportja egy olyan $H \leq G$ részcsoport, ami az egységelem mellett még legalább egy másik elemet is tartalmaz és $H \neq G$.) (ZH, 2006. május 4.)

8. Van-e olyan 20 elemű csoport, amelyben

a) van 5 rendű elem, de nincs 20 rendű elem;
b) van 20 rendű elem, de nincs 5 rendű elem?
(ZH, 2003. április 30.)

9. Egy G csoport g elemére teljesül, hogy $o(g) = o(g^k)$ (ahol $o(g)$ a g elem rendjét jelöli és k pozitív egész). Mutassuk meg, hogy $o(g)$ és k relatív prímek! (ZH, 2005. május 5.)

10. Bizonyítsuk be, hogy minden (legalább 2 elemű) véges csoportban van olyan elem, amelynek a rendje prímszám! (ZH, 2003. május 22.)

11. Legyen H és K egy G csoport két véges részcsoportja, melyekre teljesül, hogy $\text{lnko}(|H|, |K|) = 1$, vagyis H és K rendje relatív prímek. Mutassuk meg, hogy ekkor $H \cap K = \{e\}$, ahol e a G csoport egységeleme. (ZH, 2004. április 29.)

12. Legyen G csoport, H és K pedig G-nek részcsoportjai. Mutassuk meg, hogy $H \cup K$ akkor és csak akkor részcsoportja G-nek, ha vagy $H \subseteq K$, vagy $K \subseteq H$. (ZH, 2002. június 4.)