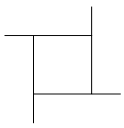
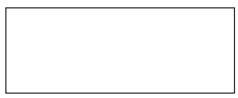
Bevezetés a Számításelméletbe II.

9. gyakorlat

1. Döntsd el az alábbiakban megadott halmazokról és a rajtuk értelmezett műveletekről, hogy
(i) a művelet asszociatív-e; (ii) van-e egységelem;
(iii) mely elemeknek van inverze; (iv) csoportot alkot-e a halmaz a művelettel?
(a) a síkvektorok halmaza; a síkvektorok összeadása.
(b) egy tetszőleges X halmaz összes részhalmazainak halmaza; a halmazok uniója.
(c) egy tetszőleges X halmaz összes részhalmazainak halmaza; a halmazok szimmetrikus differenciája. (Az A és B halmazok szimmetrikus differenciája alatt definíció szerint az $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ halmazt értjük.)
(d) az egész számok $\mathbb{Z}$ halmaza; az $a * b = a + b + 1$ képlettel megadott művelet.

2. Határozd meg az alábbi rajzok szimmetriacsoportját úgy, hogy nevet adsz elemeiknek és felírod a műveleti táblát (egy táblázatban minden elempárra megmondod, hogy mi a szorzatuk)!

a)  b) 

3. Bizonyítsd be, hogy csoportban mindig megoldható az $a \cdot x = b$ egyenlet! (Ez tehát azt jelenti, hogy egy tetszőleges G csoport minden a és b eleméhez található a csoportnak olyan x eleme, amelyre $a \cdot x = b$ teljesül.)

4. Legyen G egy olyan csoport, amelyben minden elem négyzete (vagyis önmagával vett szorzata) az egységelem. Bizonyítsd be, hogy G Abel-csoport!

5. Döntsd el, hogy a megadott halmazok a rajtuk értelmezett művelettel csoportot alkotnak-e?
a) a $H = \{\text{tik}, \text{tak}\}$ halmaz; az $x * y = \begin{cases} \text{tik}, & \text{ha } x = y \\ \text{tak}, & \text{ha } x \neq y \end{cases}$ utasítással megadott művelet.
b) $H = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\ , a^2 + b^2 \neq 0\}$ számhalmaz; a valós számok szorzása.
c) a (-1)-től különböző valós számok halmaza; az $a * b = a \cdot b + a + b$ képlettel megadott művelet.
d) az $n \times n$-es, 1 determinánsú (valós) mátrixok halmaza; a mátrixszorzás.

6. Egy szabályos ötszög csúcsait számozzuk meg az óramutató járásával ellenkező irányban 1-től 5-ig. Jelölje t_i az i-edik csúcson, és a vele szemközti oldal felezőpontján átmenő tengelyre való tükrözést. Jelölje f_{72}, f_{144}, f_{216} és f_{288} az ötszög középpontja körüli, megfelelő szögű forgatást. Végül jelölje I az identitást. Végezd el a szabályos ötszög szimmetriacsoportjában az alábbi műveleteket!
a) $f_{144} \cdot t_1$ b) $f_{72} \cdot t_2 \cdot f_{72} \cdot t_2$ c) $(t_1 \cdot t_3)^{-1}$

7. Bizonyítsd be, hogy tetszőleges G csoport minden $a, b \in G$ elemeire $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$.

8. A G véges Abel-csoport összes elemét összeszorozzuk valamilyen sorrendben. Bizonyítsd be, hogy eredményül G-nek olyan elemét kapjuk, amelynek az inverze önmaga!

9. Csoportot alkotnak-e a szokásos szorzásra a valós és tiszta képzetes komplex számok a 0 nélkül, azaz csoport-e $(X, \cdot)$, ahol $X = \{a \in \mathbb{R} : a \neq 0\} \cup \{ai : 0 \neq a \in \mathbb{R}\}$, ill. $\cdot$ a komplex számokon értelmezett szokásos szorzást jelöli? (ZH, 2006. május 4.)

10. A H halmaz álljon a 900 összes pozitív osztójából. Értelmezzük H-n a $*$ műveletet úgy, hogy $a, b \in H$ esetén $a * b$ meghatározásához először a-t és b-t (hagyományos értelemben) összeszorozzuk, majd az eredmény prímtényezős felbontásában minden prím kitevőjét helyettesítjük a 3-mal vett osztási maradékával. (Így például $36 * 60 = 10$.) Döntsük el, hogy H csoportot alkot-e a $*$ műveletre nézve! (ZH, 2005. május 5.)

http://www.albinoblacksheep.com/games/bloxorz