

Bevezetés a Számításelméletbe II.

7. gyakorlat

- Milyen maradékot ad
 - 100^{100} 11-gyel osztva;
 - $65^{63^{61}}$ 66-tal osztva;
 - 41^{41} 35-tel osztva?
- Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok pozitív egész n esetén teljesül, hogy $29|23n+6$. (ZH 2008. április 23.)
- Legyen n páratlan egész szám, amely nem osztható egyetlen prímszám négyzetével sem. Bizonyítsuk be, hogy n pozitív osztóinak átlaga egész szám! (ZH, 2003. április 30.)
- Határozzuk meg a $10x \equiv 24 \pmod{m}$ lineáris kongruencia megoldásait modulo m , ahol
 - $m = 15$ ill.
 - $m = 16$. (ZH 2008. április 23.)
- Határozzuk meg az összes olyan n egész számot, amelyre

$$5^n \equiv 3^n + 8 \pmod{26}$$

teljesül! (ZH, 2005. május 5.)

- Bizonyítsuk be, hogy ha $(a, m) \equiv 1$, $(b, m) \equiv 1$ és $ax \equiv b \pmod{m}$ valamint $by \equiv a \pmod{m}$, akkor $xy \equiv 1 \pmod{m}$. (ZH 2006. május 4.)
- Mi az utolsó két számjegye az alábbi számoknak?
 - 2001^{2007}
 - $99^{77^{55}}$
 - 51^{151}

8. a) Egy perzsa sahnak 100 felesége van, a börtönében is épp 100 rab sínylődik, 1-től 100-ig számozott cellákban. A börtöncellák zárjai „kétállásúak”: ha egyet fordítanak rajtuk, a bezárt ajtó kinyílik, a nyitott ajtó bezáródik. A sah születésnapján a 100 feleség végigvonul a börtönön és a zárossal játszanak. Az első feleség minden záron egyet fordít, a második feleség minden második ajtó zárján egyet fordít, stb., a k -edik feleség minden k -edik ajtó zárján egyet fordít, egészen a 100. feleségig. Végül azok a rabok, akiknek az ajtaja nyitva van, kiszabadulnak. Milyen sorszámú cellákban laknak a szerencsések?

b) A sah következő születésnapján a feleségek megint rosszkodnak. Most az első feleség minden záron egyet fordít, a második feleség minden második ajtó zárján kettőt fordít, stb., a k -edik feleség minden k -edik ajtó zárján k -t fordít, egészen a 100. feleségig. Most milyen sorszámú cellák lakói szabadulnak?

- Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a, b, c, d, e és f egész számokra

$$(a + b, c + d, e + f) | ace + bdf$$

teljesül (ahol a gömbölyű zárójel a legnagyobb közös osztót jelöli).

- Melyek az $n^4 + 4$ alakú prímszámok?

Feketén-fehéren... <http://www.nitrome.com/games/yinyang/>