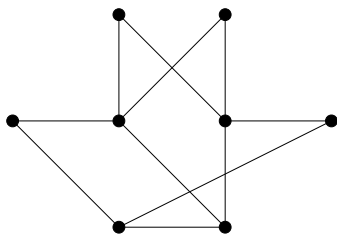


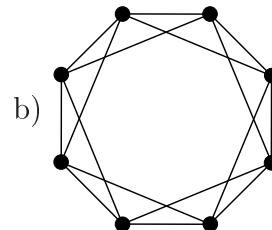
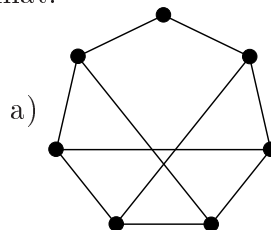
# Bevezetés a Számításelméletbe II.

## 2. gyakorlat

1. Páros gráf-e az alábbi gráf?



2. Határozd meg az alábbi gráfok kromatikus számát!



3. Egy gráf csúcsai legyenek az 1 és 2007 közé eső természetes számok. Két csúcsot akkor kössünk össze, ha a különbségük legfeljebb 9. Mennyi a gráf kromatikus száma?

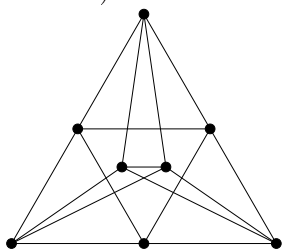
4. a) Tegyük fel, hogy a  $G$  gráfot megszíneztük  $\chi(G)$  színnel; legyen ezek közül a színek közül kettő a piros és a kék. Bizonyítsd be, hogy ekkor található a gráfban két szomszédos csúcs, amelyek közül az egyik piros, a másik kék.

b) Bizonyítsd be, hogy  $e$  élű  $G$  gráfra  $e \geq \binom{\chi(G)}{2}$ .

5. A  $G$  egyszerű gráfban 2007 darab kivételes ponttól eltekintve minden pont foka legfeljebb 2006. Bizonyítsd be, hogy  $\chi(G) \leq 2007$ .

6. Határozzuk meg az összes olyan  $n$  csúcsú, egyszerű  $G$  gráfot, amelyre  $\chi(G) = 3$ , de bárhogy hagyunk el  $G$ -ből egy csúcsot (az éleivel együtt), a kapott  $G'$  gráfra  $\chi(G') = 2$ ! (ZH, 2003. május 13.)

7. Határozzuk meg az ábrán látható  $G$  gráf kromatikus számát,  $\chi(G)$ -t! (ZH, 2005. március 31.)



8. A  $G$  gráf csúcsai legyenek az  $u_1, u_2, \dots, u_{2003}, v_1, v_2, \dots, v_{2004}$  pontok.  $G$  feszített részgráfja az  $u_i$  pontokon egy 2003, a  $v_i$  pontokon pedig egy 2004 hosszúságú kör. Ezen kívül  $u_i$  és  $v_j$  össze van kötve egymással minden lehetséges  $i, j$  értékpár esetén. Mennyi a  $G$  gráf kromatikus száma? (ZH, 2004. március 25.)

9. Legyen  $G$  olyan gráf, melyre  $\chi(G) = k$ . Bizonyítsuk be, hogy  $G$  élei irányíthatók úgy, hogy a leghosszabb irányított út legfeljebb  $k$  pontot tartalmazzon! (ZH, 1999. április 8.) (Az élek irányítása azt jelenti, hogy minden él egyik végére egy nyilat teszünk. Irányított út azt jelenti, hogy úgy teszünk meg egy utat a gráfban, hogy a nyilakkal szemben nem haladhatunk.)

10.a) Legyen  $G$  egy olyan egyszerű gráf, amelynek pontjai számozhatóak úgy, hogy minden pont legfeljebb kettő nála nagyobb sorszámúval szomszédos. Igazoljuk, hogy  $\chi(G) \leq 3$ . (ZH, 2001. május 27.)

b) Adott a síkban néhány egyenes úgy, hogy semelyik három nem megy át egy ponton. Legyen  $G$  az ezek által meghatározott gráf:  $G$  csúcsai az egyenesek metszéspontjai, két csúcs pedig akkor szomszédos, ha az egyik egyenesen szomszédos metszéspontok. Mutassuk meg, hogy  $\chi(G) \leq 3$ .

11. Bizonyítsd be, hogy tetszőleges  $e$  élű, egyszerű gráf élei közül elhagyható legfeljebb  $\frac{e}{2}$  úgy, hogy a maradék gráf páros gráf legyen!