

Bevezetés a Számításelméletbe I.

10. gyakorlat

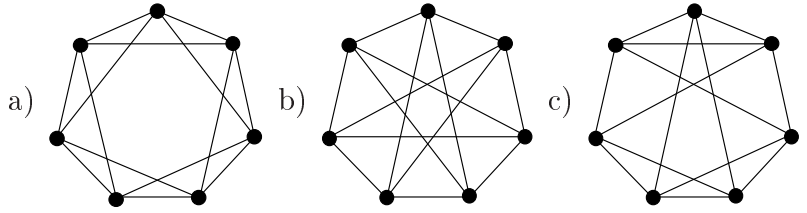
1. Határozd meg az összes olyan, páronként nem izomorf, egyszerű gráfot, melyre

a) $v = 4, e = 5$ b) $v = 5, e = 3$

c) $v = 5, e = 7$ d) $v = 5, e = 8$

ahol v jelöli a pontok számát, e az élek számát!

2. Vannak-e izomorfak az alábbi gráfok között?



3. a) Egy BME hallgató Neptun-kódja egy olyan, 6 karakterből álló sorozat, amelynek minden tagja az angol ábécé 26 betűjének egyike, vagy a $0, 1, \dots, 9$ számjegyek valamelyike. Hány olyan Neptun-kód készíthető, amelynek legalább az egyik tagja betű? (ZH, 2004. december 9.)

b) Hány részhalmaza van egy n elemű halmaznak?

c) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} = ?$

d) Egy csomag francia kártyában 52 különböző lap és három teljesen ugyanolyan dzsoli található. Ha megkeverjük a kártyacsomagot, hányféle különböző sorrendje alakulhat ki a lapoknak? (ZH, 2002. december 5.)

e) Hányféleképpen lehet 8 szál (teljesen ugyanolyan) tulipánt szétosztani 5 különböző vázába? (A vázák közül akár bizonyosak üresen is maradhatnak.)

4. a) Bizonyítsd be, hogy egy fának mindig van (legalább kettő) elsőfokú pontja (azaz levele).

b) Bizonyítsd be ennek segítségével, hogy egy n pontú fa éleinek száma $n - 1$.

5. Döntsd el, van-e olyan egyszerű gráf, amelyben a pontok foka rendre

a) $1, 2, 2, 3, 3, 3$;

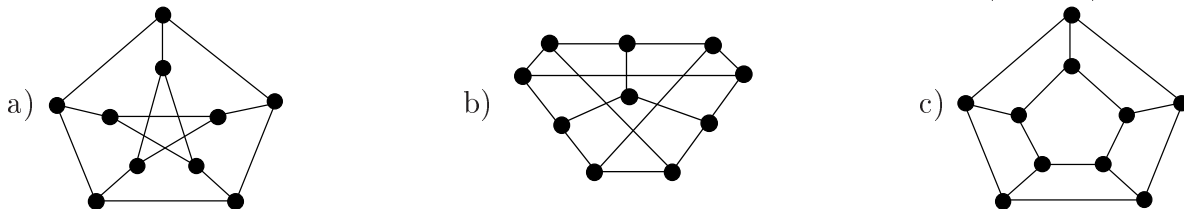
b) $1, 1, 2, 2, 3, 4, 4$;

c) $2, 3, 3, 4, 5, 6, 7$;

d) $1, 3, 3, 4, 5, 6, 6$.

6. Egy n pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább $\frac{n}{2}$. Bizonyítsd be, hogy a gráf összefüggő!

7. A G gráf pontjai legyenek az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaz 2 elemű részhalmazai; két csúcs akkor legyen szomszédos, ha a megfelelő részhalmazok diszjunktak. Az alábbi gráfok közül melyik (melyek) izomorf(ak) G -vel?



8. a) Egy gimnazista bizonyítványában 3 db 2-es, 2 db 3-as, 2 db 4-es és 5 db 5-ös szerepel. Hányféle sorrendben írhatja fel a jegyeket egy papírra, ha nem írja melléjük, hogy melyik tárgyból kapta őket?

b) Egy számkombinációs zárat 5 különböző, 1 és 20 közötti szám begépelésével lehet kinyitni. Tudjuk, hogy a kódban a számok növekvő sorrendben vannak. Hány próbálkozásra van szükség, hogy a zárat biztosan ki tudjuk nyitni?

c) 5 házaspár ül egy padon. Hányféleképpen helyezkedhetnek el, ha a házastársak egymás mellett akarnak ülni?

d) Margit néni minden héten 20 lottószelvényvel lottózik. Hányféleképpen töltheti ki egy héten a szelvényeit, ha persze nem akar két ugyanolyan szelvényt bedobni?

e) Az előre megszámozott (címkézett) n darab pont közé hányféleképp húzhatunk be éleket úgy, hogy egyszerű gráfhoz jussunk? (ZH, 2000. december 7.)

f) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots \pm \binom{n}{n} = ?$

9. Hány 60 csúcsú, 1768 élű, páronként nem izomorf egyszerű gráf létezik?

10. Bizonyítsd be, hogy egy egyszerű gráf és a komplementere közül legalább az egyik mindig összefüggő!

11. Van-e olyan 100 csúcsú egyszerű gráf, amelyben minden pont foka 54? (ZH, 2002. december 12.)