Bevezetés a Számításelméletbe I.

8. gyakorlat

1. Keresd meg a az alábbi mátrix minden sajátértékét és sajátvektorát!

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Legyen V a síkvektorok szokásos vektortere és $\mathcal{A} : V \mapsto V$ az a lineáris transzformáció, amely minden $\underline{v}$ vektorhoz az x tengelyre vett tükörképét rendeli. Határozd meg $\mathcal{A}$ minden sajátértékét és sajátvektorát!

3. Keresd meg az alábbi mátrix összes sajátértékét és a legnagyobb sajátértékhez tartozó összes sajátvektort is!

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

4. Legyen V a síkvektorok szokásos vektortere. Határozd meg V alábbi lineáris transzformációinak sajátértékeit, sajátvektorait!

a) az a leképezés, amely minden vektorhoz a $\underline{0}$-t rendeli;

b) az a leképezés, amely az (x, y) vektorhoz az $(x + y, 0)$ vektort rendeli;

c) az origó körüli $+90°$-os forgatás.

5. Az $\mathcal{A} : V_1 \mapsto V_2$ lineáris leképezésről tudjuk, hogy teljesül rá az alábbi két feltétel:

a. Tetszőleges 7 elem képe lineárisan összefüggő.

b. Tetszőleges 8 lineárisan független V_1-beli elem között van olyan, amelyiknek a képe nem $\underline{0}$.

Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\dim V_1 \le 13$. (ZH, 2003. december 2.)

6. Legyen A olyan négyzetes mátrix, amelynek nincs valós sajátértéke. Bizonyítsuk be, hogy

a) A-nak létezik inverze;

b) A^{-1}-nek sincs valós sajátértéke.

7. Határozzuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy az alábbi A mátrixnak a 0 sajátértéke legyen! A kapott mátrixnak keressük meg a többi sajátértékét is és a legnagyobb sajátértékhez keressünk egy sajátvektort! (ZH, 2002. december 5.)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & p & 4 \end{pmatrix}$$

8. Tekintsük a legfeljebb harmadfokú, valós együtthatós polinomokat (azaz ax^3+bx^2+cx+d alakú kifejezéseket, ahol $a, b, c, d, \in \mathbb{R}$). Ezeket értelemszerűen össze tudjuk adni, vagy meg tudjuk szorozni egy valós számmal. Így egy V vektorteret kapunk (ezt érdemes ellenőrizni). Mutasd meg, hogy az alábbi $\mathcal{A} : V \to V$ függvények lineáris transzformációk és határozd meg az összes sajátértéküket és sajátvektorukat! Minden polinomnak feleltessük meg

a) a deriváltját;

b) a deriváltjának x-szeresét.

9. Az alábbi A mátrixról és $\underline{v}$ vektorról tudjuk, hogy $\underline{v}$ sajátvektora A-nak.

a) Határozzuk meg a p paraméter értékét!

b) Határozzuk meg A egy sajátértékét!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 6 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} p \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(ZH, 2006. december 7.)

10. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{A} : V \mapsto V$ lineáris transzformációnak a $\lambda = -1$ sajátértéke. Igaz-e, hogy a $\lambda = -1$ az $\mathcal{A}^3$ transzformációnak is sajátértéke? (ZH, 2007. november 28.)

11. Melyek azok a véges dimenziós valós V vektorterek, melyeken létezik olyan $\mathcal{A} : V \mapsto V$ lineáris transzformáció, amelyre $\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} = 2 \dim \operatorname{Im} \mathcal{A}$ teljesül? (ZH, 2007. november 28.)

12. Melyek igazak az alábbi állítások közül (tetszőleges vektortérben)? ($\mathcal{A}^2$ az $\mathcal{A} \circ \mathcal{A}$ leképezést jelöli, $\mathcal{O}$-val azt a leképezést jelöltük, ami minden vektorhoz a $\underline{0}$-t rendeli.)

a) Ha $\underline{v}$ sajátvektora $\mathcal{A}^2$-nek, akkor $\underline{v}$ sajátvektora $\mathcal{A}$-nak.

b) Ha 0 sajátértéke $\mathcal{A}^2$-nek, akkor 0 sajátértéke $\mathcal{A}$-nak.

c) Ha $\mathcal{A}^2 = \mathcal{O}$, akkor $\mathcal{A}$-nak a 0 az egyetlen sajátértéke.

d) $\mathcal{A}$ minden sajátvektora $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ és $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ közül legalább az egyiknek eleme.