Bevezetés a Számításelméletbe I.

5. gyakorlat

1. A (100×100)-as A mátrixra teljesül, hogy minden sorában az elemek összege 1. A (100×100)-as B mátrix minden eleme 2. Határozzuk meg az $A\cdot B$ szorzatot! (ZH, 2006. október 26.)

2. Számold ki az alábbi mátrixokat!

a) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{2008}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{2007}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n}$

3. Legyen A $n\times n$-es mátrix, $x, y \in \mathbb{R}^n$ pedig n magas oszlopvektorok. Bizonyítsd be, hogy ha $x \neq y$, de $Ax = Ay$ akkor $\det A = 0$.

4. Legyen A olyan $n\times n$-es mátrix, melyre $A = A^T$ és A^2 főátlójában csak nullák állnak. Igazoljuk, hogy A a nulla mátrix (minden eleme 0). (ZH, 1999. december 16.)

5. A (100×100)-as A mátrix első 50 oszlopának minden eleme 3, az utolsó 50 oszlop minden eleme 2. A (100×100)-as B mátrix minden oszlopára teljesül, hogy abban az első 50 elem összege 2, az utolsó 50 elem összege 3. Határozzuk meg az $A\cdot B$ szorzatot! (ZH, 2006. november 9.)

6. Írd fel az $A(1,1,7)$, $B(3,2,8)$, $C(8,4,8)$ pontokon átmenő sík egyenletét!

7. Tekintsük az $A = (2,1,4)$, $B = (1,1,6)$, $C = (3,0,1)$, $D = (0,1,1)$, $E = (7,1,3)$ pontokat a szokásos 3 dimenziós térben. Határozzuk meg az A, B és C, illetve C, D és E pontok által meghatározott síkok metszetegyenesének irányvektorát! (ZH, 2007. november 8.)

8. Legyen $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \\ 10 & -2 \end{pmatrix}$. Oldd meg az $AX = B$ „mátrixegyenletet”, vagyis keresd meg az összes olyan X mátrixot, amire az egyenlőség teljesül.

9. Legyenek $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(n\times n)$-es mátrixok. Bizonyítsd be, hogy ha A oszlopai lineárisan függetlenek és B oszlopai is lineárisan függetlenek, akkor az $A\cdot B$ mátrix oszlopai is lineárisan függetlenek!

10. A 100×100-as A mátrix főátlójában és a 100-adik sorában mindenhol 1-es áll, az összes többi (9801 darab) eleme 0. Határozzuk meg az A^{100} mátrixot! (ZH, 2004. november 4.)

11. Egy $n\times n$-es A mátrix minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldetermináns értékével. Mi lesz az így kapott n^2 darab szorzat összege?

12. Egy $2k\times 2k$-as mátrix főátlójának minden eleme γ, a bal alsó sarkot a jobb felső sarokkal összekötő átló minden eleme δ, a többi elem pedig 0. Számítsd ki a mátrix determinánsát!

13. Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyik/melyek igaz(ak) tetszőleges A négyzetes mátrixra! (0-val jelöltük a csupa nulla mátrixot.)

a) Ha van olyan $k \geq 1$ egész szám, amelyre $A^k = 0$, akkor $\det A = 0$.

b) Ha $\det A = 0$, akkor van olyan $k \geq 1$ egész szám, amelyre $A^k = 0$.

(ZH, 2003. január 9.)