Bevezetés a Számításelméletbe I.

4. gyakorlat

1. Számold ki *csak a definíció felhasználásával* az alábbi determináns értékét!

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 8 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 9 & 0 \end{vmatrix}$$

2. Számold ki az alábbi determináns értékét!

$$\begin{vmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 2 & 6 & 12 & 20 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$$

3. Számold ki *csak a definíció felhasználásával* az alábbi determinánsok értékét!

a) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 8 \\ 7 & 2 & 9 & 8 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 0 & 2 & 9 \\ 6 & 8 & 1 & 4 & 7 \end{vmatrix}$

4. Számold ki az alábbi determinánsokat!

a) $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \\ 4 & 1 & 6 & 20 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 4 & 7 & 10 & 13 & 16 \\ 1 & 5 & 9 & 13 & 17 & 21 \\ 1 & 6 & 11 & 16 & 21 & 26 \\ 1 & 7 & 13 & 19 & 25 & 31 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$

5. Mennyi az $1, 2, \dots, n$ elemek alábbi permutációinak inverziószáma?

a) 1,3,5,7,9,8,6,4,2 $(n = 9)$ b) 100,101,98,99,96,97,...,2,3,1 $(n = 101)$

6. Számold ki az alábbi determinánsokat!

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 2 & 4 & 6 & 8 & \dots & 2n \\ 3 & 6 & 9 & 12 & \dots & 3n \\ 4 & 8 & 12 & 16 & \dots & 4n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 2n & 3n & 4n & \dots & n^2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$

7. Egy $n \times n$-es A mátrixban az i-edik sor és a j-edik oszlop kereszteződésében álló elem $a_{ij} = i^2 j^2 + 1$. Határozzuk meg A determinánsát! (ZH, 2002. december 10.)

8. A 101×101-es A mátrixban az i-edik sor és a j-edik oszlop kereszteződésében álló elem

$$a_{ij} = \begin{cases} 3^{2004}\text{-nek a } (2i+j)\text{-edik számjegye,} & \text{ha } i \cdot j \text{ páros,} \\ 0, & \text{ha } i \cdot j \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Határozzuk meg A determinánsát! (ZH, 2004. november 4.)

9. Bizonyítsd be, hogy

$$\begin{vmatrix} 1849 & 1444 & 1896 & 1222 \\ 1490 & 1703 & 1790 & 1526 \\ 1342 & 1566 & 1541 & 1514 \\ 1242 & 1552 & 1382 & 1825 \end{vmatrix} \neq 0$$

10. Az $n \times n$-es A mátrix minden eleme egy 3-mal osztva 1 maradékot adó egész szám. Bizonyítsuk be, hogy A determinánsa osztható (3^{n-1})-nel! (ZH, 2004. december 14.)