

Bevezetés a Számításelméletbe I.

3. gyakorlat

1. Oldd meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket! Használd a Gauss-elimináció módszerét!

$$\begin{array}{l} -x + 3y + 3z = 2 \\ a) \quad 3x + y + z = 4 \\ 2x - 2y + 3z = 10 \end{array} \quad \begin{array}{l} x + 3y + 2z = 3 \\ b) \quad 3x + 5y + 10z = 5 \\ 3x + 2y + 13z = 2 \\ 6x + 13y + 17z = 13 \end{array} \quad \begin{array}{l} x + 3y + 2z = 3 \\ c) \quad 3x + 5y + 10z = 5 \\ 3x + 2y + 13z = 2 \\ 6x + 13y + 17z = 11 \end{array}$$

2. Döntsük el, hogy a c valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek! Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset! (ZH, 2004. december 14.)

$$\begin{array}{r} -x + 3y - z - 3w = -2 \\ 2x - 6y + 5z + 12w = 7 \\ 3x - 9y + 5z + cw = 9 \end{array}$$

3. Lineárisan függetlenek-e az alábbi, \mathbb{R}^4 -beli vektorrendszerek?

$$\begin{array}{l} a) \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 13 \\ 17 \end{pmatrix} \\ c) \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} b) \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \\ d) \quad \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 33 \\ \sqrt{2} \\ 5 \\ \sqrt{7} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -51 \\ 19 \\ \sqrt[3]{19} \\ 44 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

4. Adjuk meg a térben az alábbi egyenletekkel megadott S_1 , S_2 és S_3 síkok (összes) metszéspontját! (ZH, 2001. október 31., 2004. december 20.)

$$\begin{array}{l} S_1 : x + y + z = 6 \\ a) \quad S_2 : 2x + 3y - 2z = 0 \\ S_3 : 5x + 7y - 3z = 6 \end{array} \quad \begin{array}{l} S_1 : 2x - y + 5z = 3 \\ b) \quad S_2 : 3x + 2y + 6z = 4 \\ S_3 : 4x - 9y + 13z = 9 \end{array}$$

5. Döntsük el, hogy a c valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszereknek! Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset! (ZH, 2004. november 4., 2006. október 26.)

$$\begin{array}{l} 2x + 6y + z = -6 \\ a) \quad 2x + 11y + 11z = 14 \\ 4x + 10y + cz = -20 \\ 2x + 9y + (c + 10)z = 6 \end{array} \quad \begin{array}{l} -x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 1 \\ b) \quad 5x_1 + 15x_2 - 2x_3 + 26x_4 = 4 \\ 2x_1 + 6x_2 + c \cdot x_4 = 4 \\ 4x_1 + 12x_2 + x_3 + (c + 14) \cdot x_4 = 11 \end{array}$$

6. Határozd meg a metszetét

- az $x - 2 = -\frac{y+4}{2} = z - 4$ és az $\frac{x-5}{2} = \frac{y-4}{3} = -\frac{z+1}{2}$ egyenletrendszerű egyeneseknek;
- az $(1, 1, 1)$ és $(2, 2, 4)$ pontokon átmenő egyenesnek, valamint a $2x + 3y - z = 2$ egyenletű síknak; (ZH, 2000. november 2.)
- az $x - 2y + z = 0$, az $x + y - z = 1$ és a $3x - 3y + z = 1$ egyenletű síkoknak!

7. Legyenek \underline{u} , \underline{v} és \underline{w} a V (tetszőleges) vektortér lineárisan független vektorai. A p valós paraméter milyen értékeire teljesül, hogy az $\underline{a} = \underline{u} - \underline{v}$, $\underline{b} = \underline{u} + \underline{w}$, $\underline{c} = \underline{u} + \underline{v} - \underline{w}$, $\underline{d} = p \cdot \underline{u} + \underline{v} + \underline{w}$ vektorok szintén lineárisan függetlenek? (ZH, 2004. december 14.)

8. Tudjuk, hogy egy vektortérben a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_{100}$ vektorok bázist alkotnak. Hány dimenziós a $\langle \underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_2 + \underline{v}_3, \dots, \underline{v}_{99} + \underline{v}_{100}, \underline{v}_{100} + \underline{v}_1 \rangle$ altér? (ZH, 2007. október 24.)

9. Tegyük fel, hogy adott egy lineáris egyenletrendszer, amelyről tudjuk, hogy megoldható és a megoldás egyértelmű. Ha most megváltoztatjuk az egyenletek jobb oldalán álló számokat (de csak azokat), előfordulhat-e, hogy a kapott egyenletrendszernek

- nincs megoldása;
- végtelen sok megoldása van?