Bevezetés a számításelméletbe I.

2. gyakorlat

1. Legyen a szokásos 3 dimenziós térben ($\mathbb{R}^3$-ben)

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Döntsd el az alábbi állításokról, hogy igazak-e!

a) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan független.

b) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{d}$ lineárisan független.

2. Döntsd el, hogy az $\mathbb{R}^4$ vektortérben alteret alkotnak-e az alábbi részhalmazok!

a) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_3 = 0 \right\}$;

b) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_2 = 1 \right\}$.

3. Döntsd el, hogy az alábbi állítások igazak-e az **1.** feladatban bevezetett $\mathbb{R}^3$-beli vektorokra!

a) $\underline{d} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$

b) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ generátorrendszer.

c) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ bázis.

d) $\underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ lineárisan független.

e) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{d}$ generátorrendszer.

4. Tegyük fel, hogy egy (tetszőleges) V vektortér $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ és $\underline{d}$ elemeire $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} + \underline{d} = \underline{0}$. Melyek igazak mindig az alábbi állítások közül?

a) $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = \langle \underline{a}, \underline{c} \rangle$;

b) $\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle = \langle \underline{a}, \underline{c}, \underline{d} \rangle$;

c) $\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle = \langle \underline{a}, \underline{d} \rangle$.

5. Legyen $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ lineárisan független (egy tetszőleges vektortérben). Bizonyítsuk be, hogy ekkor az $\underline{a}-\underline{b}$, $\underline{a}-\underline{c}$, $\underline{b}+\underline{c}$ vektorrendszer is lineárisan független!

6. Adjuk meg $\mathbb{R}^3$ (a háromdimenziós valós tér) alábbi alterének egy bázisát:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 3x + 2y + z = 0 \right\}$$

7. Legyen $\mathbb{R}^4$-ben

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Döntsd el az alábbi állításokról, hogy igazak-e!

a) $\underline{d} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$

b) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ generátorrendszer

c) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ lineárisan független

d) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ bázis

e) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan független

f) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ bázis

8. Döntsd el, hogy az $\mathbb{R}^4$ vektortérben alteret alkotnak-e az alábbi részhalmazok!

a) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \right\}$;

b) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\}$.

9. Döntsd el, hogy a t paraméter milyen valós értékére

a) párhuzamos az $5x - 6y + 2z = 10$ egyenletű sík a $tx - 3y + z = 7$ egyenletű síkkal;

b) merőleges az $\frac{x-5}{2} = \frac{y+9}{-2} = \frac{z}{3}$ egyenletrendszerű egyenes a $8x + ty + 12z = 19$ egyenletű síkra;

c) metszi az $\frac{x-5}{2} = \frac{y+9}{-2} = \frac{z}{3}$ egyenletrendszerű egyenes a $8x + ty + 12z = 19$ egyenletű síkot.

10. Legyenek $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$ lineárisan független vektorok. Adjuk meg a c paraméter összes olyan valós értékét, melyre a $\underline{v}_1 - \underline{v}_2, \underline{v}_2 - \underline{v}_3, \ldots, \underline{v}_{k-1} - \underline{v}_k, \underline{v}_k - c\underline{v}_1$ vektorok lineárisan függetlenek! (ZH, 1998. november 5.)

11. Tükrözzük a $P(8, -3, 3)$ pontot a $7x - y + 2z = 11$ egyenletű síkra és határozzuk meg a tükörkép koordinátáit! (ZH, 2004. december 14.)