Bevezetés a számításelméletbe I.

1. gyakorlat

1. A z mely értékei mellett merőleges az $(5, -3, 2)$ és a $(7, 4, z)$ vektor egymásra?
2. Írjuk fel a $(3, 4, 5)$ ponton átmenő, a $3x + y - 3z = 8$ egyenletű síkkal párhuzamos sík egyenletét.
3. A c valós paraméter milyen értékeire lesz merőleges a $3x + cy + 4z = 7$ és a $12x - cy + 16z = 5$ egyenletű sík? Milyen c esetén fogják egymást metszeni?
4. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amelyik átmegy az origón és merőleges a $(2, 3, 4)$ vektorra! Írjuk fel az ezzel párhuzamos, $(1, 1, 1)$ pontot tartalmazó síkét is.
5. Egy sík a koordinátatengelyeket a $(2, 0, 0)$, $(0, -1, 0)$, $(0, 0, 5)$ pontokban metszi. Írjuk fel az egyenletét.
6. Írjuk fel a $(12, -1, 9)$ ponton átmenő és az $x = 3 + 7t, \quad y = -8 + 5t, \quad z = -t$ egyenletű egyenessel párhuzamos egyenes egyenletét. Állítsuk elő az egyenest két sík metszeteként is!
7. Határozzuk meg a háromdimenziós térben az $(1, 1, 1)$ és $(2, 2, 4)$ pontokon átmenő egyenes és a $2x + 3y - z = 2$ egyenletű sík metszetét.
8. Határozzuk meg a $3x + 4y + 12z + 25 = 0$ sík és a $(2, 3, 4)$ pont távolságát.
9. Legyen V az egész számok halmaza. Jelölje $\oplus$ az egész számok összeadását és minden $\lambda \in \mathbf{R}$ skalár, valamint $\underline{v} \in V$ esetén legyen $\lambda \odot \underline{v} = \underline{v}$. Döntsd el, hogy a V halmaz a most definiált $\oplus$ és $\odot$ művelettel vektorteret alkot-e!
10. Legyen V a pozitív valós számok halmaza. Minden $\underline{u}, \underline{v} \in V$ esetén legyen $\underline{u} \oplus \underline{v} = \underline{u} \cdot \underline{v}$ (vagyis $\oplus$ a pozitív valós számok szorzását jelöli) és minden $\lambda \in \mathbf{R}$ skalár, valamint $\underline{v} \in V$ esetén legyen $\lambda \odot \underline{v} = \underline{v}^{\lambda}$. Döntsd el, hogy a V halmaz a most definiált $\oplus$ és $\odot$ művelettel vektorteret alkot-e!
11. Vektorteret alkotnak-e az alábbi halmazok (a valós számok, mint skalárhalmaz felett)?
    (a) Az összes térvektor,
    (b) a sík összes, x vagy y tengellyel párhuzamos vektora,
    (c) az összes $ax + by = c$ alakú egyenlet,
    (d) az összes n-edfokú egyváltozós polinom,
    (e) az összes legfeljebb n-edfokú egyváltozós polinom,
    (f) a folytonos függvények,
    (g) $\{f : f(5) = f(8)\}$.
12. A valós számhármasok terében vektorteret alkotnak-e azok az (x_1, x_2, x_3) vektorok, melyekre
    (a) $x_1 = 2x_2 - 3x_3$,
    (b) $x_1 = 2x_2 - 3x_3 + 2$?
13. Legyen a szokásos 3 dimenziós térben

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

    (a) Kifejezhető-e (összeadás és skalárral való szorzás segítségével) az $\underline{\text{u}}$, $\underline{\text{v}}$ és $\underline{\text{w}}$ vektorokból az $\underline{\text{a}}$ vektor?
    (b) $\mathbf{R^3}$ mely vektorai fejezhetők ki az $\underline{\text{u}}$,$\underline{\text{v}}$ és $\underline{\text{w}}$ vektorokból?
14. Az $\mathbf{R^4}$ vektortér mely vektorai fejezhetők ki a következő vektorok segítségével?

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

15. Legyen V vektortér $\mathbf{R}$ felett. Bizonyítsd be a vektortér-axiómák segítségével, hogy minden $\underline{v} \in V$ vektorra és $\lambda \in \mathbf{R}$ skalárra:
    (a) ha $\lambda \cdot \underline{v} = \underline{0}$, akkor $\lambda = 0$ vagy $\underline{v} = \underline{0}$,
    (b) $(-1)\underline{v} = -\underline{v}$.