

# Bevezetés a Számításelméletbe I.

## 12. gyakorlat

1. Egy fa Prüfer-kódja 100 tagú és csupa ugyanolyan számból áll. Rajzold fel a fát!
2. a) Rajzoltam egy tíz csúcsú fát, de elveszítettem. Rajzold le a duálisát!  
b) Bizonyítsd be, hogy tetszőleges két  $n$  csúcsú fa gyengén izomorf.
3. Egy 10 csúcsú fa Prüfer-kódja csupa különböző számot tartalmaz. Rajzold le a fát (a pontok számozása nélkül)!
4. Rajzolj két gyengén izomorf gráfot, amelyekre teljesül, hogy az egyikben a legnagyobb fokú pont foka legalább 100-zal nagyobb, mint a másikban.
5. Hány különböző olyan feszítőfája van az 1, 2, 3, 4 illetve 5 csúcscímkekkel ellátott  $K_5$  teljes gráfnak, amiben az 1 címkéjű csúcs nem elsőfokú? (ZH, 2005. december 18.)
6. Egy mezőn  $k$  ház és  $k$  kút áll. Minden háztól pontosan 5 (különböző) kúthoz vezet út (még hozzá közvetlenül, vagyis más házak vagy kutak érintése nélkül). Mutassuk meg, hogy biztosan van két olyan út, amelyek keresztezik egymást! (ZH, 2003. december 11.)
7. Hány különböző olyan gráf létezik  $n$  címkézett ponton, amelyben az élek száma valamilyen  $n - 1$ -nél kisebb fix  $k$  szám és amiben pontosan  $n - k - 1$  izolált pont van? (Egy csúcsot izolált pontnak nevezünk, ha egyetlen él sem indul ki belőle.) (ZH, 1999. december 9.)
8. Bizonyítsd be, hogy ha egy összefüggő gráf minden élének a költsége különböző, akkor egyértelmű a minimális költségű feszítőfája.
9. Legyen  $K$  teljes gráf az 1, 2,  $\dots$ , 100 címkéjű csúcsokon az alábbi élsúlyokkal. Az olyan élek, melyek mindkét végpontjának címkéje legfeljebb 50, egy egység súlyúak. Az olyan élek, melyek mindkét végpontjának címkéje nagyobb, mint 50, két egység súlyúak. Az olyan élek súlya, amelyeknek egyik végpontcímkéje legfeljebb 50, a másik pedig nagyobb 50-nél, három egység súlyúak. Hány különböző, minimális súlyú feszítőfa adható meg a fenti módon élsúlyozott  $K$  gráfban?
- 10\*. Mutasd meg, hogy a  $K_{3,3}$  gráfnak nem lehet absztrakt duálisa.