Bevezetés a Számításelméletbe I.

9. gyakorlat

1. Végezd el az alábbi műveleteket!

a) $(4+i)(5-2i)+(4i-1)^2$ b) $\dfrac{4+i}{5-2i}$ c) i^{18}

d) $\left|\dfrac{6+3i}{6-3i}\right|$ e) $\dfrac{(1+i)^8}{(1-i)^7}$ f) $(i-1)^{50}$

g) $\sqrt{-5}$ h) $\sqrt{i}$ i) $\sqrt[3]{-8}$

2. a) A biciklis klub tagjai négyjegyű tagsági számokat kapnak. De a biciklisták babonásak, félnek a 8-astól. Hány olyan tagsági szám lehet, amiben nincs 8-as (de 0-val kezdődhet)?

b) A hét törpe minden este más sorrendben szeretne sorban állni, amikor Hófehérke a vacsorát osztja. Hányféleképpen tehetik ezt meg?

c) Egy versenyen 57-en indulnak; az újságok az első 6 helyezettet közlik. Hányféle lehet ez a lista?

d) Egy kisváros 57 fős önkormányzati képviselőtestülete 6 fős delegációt küld a dániai testvérvárosukba. Hányféleképpen jelölhetik ki a 6 fős delegációt?

e) Hányféle lehet a dániai delegáció, ha a népszerű Kovács urat mindenképp be akarják venni?

f) Hányféle lehet a dániai delegáció, ha a népszerűtlen Kovács urat mindenképp ki akarják hagyni?

3. Oldd meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán!

a) $z^2-iz+2=0$ b) $z^2=\overline{z}$

(ZH, 2000. november 2.)

4. a) Mennyi az n. egységgyökök összege?

b) Mennyi az n. egységgyökök szorzata?

5. Végezd el az alábbi műveleteket! Az eredményt (a d) feladat kivételével) algebrai alakban add meg!

a) $(1-i)^{2000}-i(1+i)^{2002}$ (ZH, 2000. november 2.)

b) $(i-\sqrt{3})^9$ (ZH, 2002. december 5.)

c) $(i-3)^{10}$

d) $\sqrt[5]{2i-\sqrt{12}}$

e) $\sqrt[3]{24i+\dfrac{(i-1)^8}{i}}$ (ZH, 2002. december 12.)

6. Oldd meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán! Az eredményt (a d) feladat kivételével) algebrai alakban add meg!

a) $2i\cdot z^3=(1+i)^8$ (ZH, 2004. december 16.)

b) $(i+3)z^2+(i+4)z+2=0$ (ZH, 2002. december 5.)

c) $5\left(z^2+(\overline{z})^2\right)=z(12-6i)$ (ZH, 2004. december 9.)

d) $1+z+z^2+\ldots+z^{12}=1$ (ZH, 1999. február 3.)

7. a) Egy 15 tagú klub elnököt, titkárt és jegyzőt választ. Hányféleképpen tehetik ezt?

b) És ha a népszerű Kovács úrnak mindenképpen szeretnének valamilyen tisztséget adni?

c) Tíz gyerek hányféleképpen állítható úgy sorba, hogy Jancsi és Juliska egymás mellett álljanak? (ZH, 2000. december 7.)

d) Hány ötöslottó szelvényt kell kitöltenünk, hogy biztosan legyen telitalálatosunk?

e) Egy gimnáziumban 16 osztály van, az osztálylétszám mindenütt 40. Mindegyik osztály 5 tagú küldöttséget küld az iskolai diákbizottságba. Hányféle lehet a diákbizottság összetétele?

8. Bizonyítsuk be, hogy ha ε egy 10-edik és ε' egy 25-ödik egységgyök, akkor $\overline{\varepsilon}\cdot\varepsilon'$ egy 100-adik egységgyök! (ZH, 2005. november 3.)

9*. A klasszikus Mackósajt egy kör alakú dobozban elhelyezett, hat darab 60°-os körcikk formájú sajtból áll. Együnk meg ebből hármat, a maradék hármat pedig forgassuk el tetszőlegesen a doboz középpontja körül (tehát a 60°-os csúcsok továbbra is a kör középpontjában, az ívek pedig a kör kerületén helyezkednek el). Az ívek végpontjai az óramutató járása szerint legyenek rendre A_1, B_1, A_2, B_2, A_3 és B_3. Bizonyítsd be, hogy a B_1A_2, B_2A_3 és B_3A_1 szakaszok felezőpontjai szabályos háromszöget alkotnak.