Bevezetés a Számításelméletbe I.

7. gyakorlat

1. Legyen $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ az a függvény, amely a tér (x, y, z) vektorához a sík $(x - y + z, x - y + z)$ vektorát rendeli.

a) Mutasd meg, hogy $\mathcal{A}$ lineáris leképezés!

b) Határozd meg $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$-t és $\operatorname{Im} \mathcal{A}$-t!

c) Legyen $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ a tér, $C = \{(1, 0), (0, 1)\}$ pedig a sík „szokásos” bázisa. Írd fel $\mathcal{A}$ mátrixát a B és C bázisok szerint!

2. Legyen $V = \mathbb{R}^2$ a síkvektorok szokásos vektortere. Döntsd el, hogy az alábbi V-ről V-be menő hozzárendelések lineáris leképezések-e? Ha igen, add meg a kép- és magterüket! Minden $\underline{v}$ vektornak feleltessük meg

a) az x tengelyre vett tükörképét;

b) azt az x tengelyre eső vektort, amelynek első koordinátája a $\underline{v}$ koordinátái közül a nagyobb;

c) azt az x tengelyre eső vektort, amelynek első koordinátája a $\underline{v}$ koordinátáinak összege;

d) a $+90°$-kal való elforgatottját.

3. Írd fel az alábbi $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ lineáris leképezések mátrixát a „szokásos” $\{(1, 0), (0, 1)\}$ bázisban!

a) az y tengelyre való tükrözés;

b) az origó körüli $+60°$-os forgatás;

c) előbb egy y tengelyre való tükrözés, majd egy origó körüli $+60°$-os forgatás.

4. Jelölje V a valós számpárok (azaz a síkvektorok) szokásos vektorterét. Egy $\mathcal{A} : V \mapsto V$ lineáris transzformációról tudjuk, hogy az $(1, 2)$ vektorhoz a $(6, 7)$ vektort, a $(-1, 2)$ vektorhoz pedig a $(8, 9)$ vektort rendeli. Írjuk fel $\mathcal{A}$ mátrixát a „szokásos”, vagyis az $(1, 0)$ és $(0, 1)$ vektorokból álló bázisban! (ZH, 2002. december 12.)

5. Döntsd el, hogy az alábbi $\mathbb{R}^3$-ről $\mathbb{R}^2$-be (vagyis a szokásos térről a szokásos síkba) menő hozzárendelések lineáris leképezések-e? Ha igen, add meg a kép- és magterüket, ezek dimenzióját, valamint írd fel a mátrixukat a „szokásos” bázisok (azaz $\mathbb{R}^3$-ben az $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, $\mathbb{R}^2$-ben az $\{(1, 0), (0, 1)\}$) szerint!

a) $\mathcal{A} : (x, y, z) \to (x, z)$ b) $\mathcal{B} : (x, y, z) \to (x \cdot y, x \cdot z)$ c) $\mathcal{C} : (x, y, z) \to (x + y, x + z)$

6. Legyen $V = \mathbb{R}^2$ a síkvektorok szokásos vektortere és legyen $\mathcal{A} : V \to V$ egy lineáris transzformáció. Az $\mathcal{A}$ mátrixa a $\underline{b}_1 = (1, 1)$ és $\underline{b}_2 = (1, -1)$ vektorokból álló bázisban felírva az alábbi:

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{pmatrix}$$

Határozzuk meg x és y értékét, ha tudjuk, hogy $(3, 1) \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$. (ZH, 2006. november 30.)

7. Legyen $\mathcal{A}$ lineáris leképezés V_1-ről V_2-be, $\underline{v}_i \in v_1$. Melyek igazak az alábbi állítások közül?

a) Ha $\mathcal{A}(\underline{v}_1) = \mathcal{A}(\underline{v}_2)$, akkor $\underline{v}_1 - \underline{v}_2 \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$.

b) Ha $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$ generátorrendszer V_1-ben, akkor $\mathcal{A}(\underline{v}_1), \ldots, \mathcal{A}(\underline{v}_k)$ generátorrendszer V_2-ben.

c) Ha $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$ generátorrendszer V_1-ben, akkor $\mathcal{A}(\underline{v}_1), \ldots, \mathcal{A}(\underline{v}_k)$ generátorrendszer $\operatorname{Im} \mathcal{A}$-ban.

d) Ha $\mathcal{A}(\underline{v}_1), \ldots, \mathcal{A}(\underline{v}_k)$ generátorrendszer $\operatorname{Im} \mathcal{A}$-ban, akkor $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$ generátorrendszer V_1-ben.

8. Legyen $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ a V vektortér lineáris transzformációi és tegyük fel, hogy $\operatorname{Im} \mathcal{B} \cap \operatorname{Ker} \mathcal{A} = \{\mathbf{0}\}$. A V tér tetszőleges v vektorára definiálja $\mathcal{C}(v) := \mathcal{A}(\mathcal{B}(v))$ a $\mathcal{C}$ lineáris transzformációt. Bizonyítsuk be, hogy $\operatorname{Ker} \mathcal{C} = \operatorname{Ker} \mathcal{B}$. (ZH, 2007. december 5.)

9. Legyen $\mathcal{A} : V \mapsto V$ olyan lineáris transzformáció, amire $\operatorname{Im} \mathcal{A} \subseteq \operatorname{Ker} \mathcal{A}$. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathcal{A}$ transzformáció (tetszőleges bázisban felírt) A mátrixára $A^2 = 0$. (ZH, 1997. november 1.)

10. Legyen $\mathcal{A} : U \mapsto V$ egy tetszőleges lineáris leképezés, és legyen W az U vektortér egy altere. Bizonyítsuk be, hogy ha $W \cap \operatorname{Ker}(\mathcal{A}) = \{\underline{0}\}$ és $w_1, w_2, \ldots, w_k \in W$ lineárisan független vektorok U-ban, akkor az $\mathcal{A}(w_1), \mathcal{A}(w_2), \ldots, \mathcal{A}(w_k)$ vektorok lineárisan függetlenek V-ben. (ZH, 2005. november 3.)