Bevezetés a Számításelméletbe I.

6. gyakorlat

1. Számítsd ki az alábbi mátrix inverzét!

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

2. Számold ki az alábbi mátrix rangját!

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 4 & 7 & 10 & 13 \\ 1 & 5 & 9 & 13 & 17 \end{pmatrix}$$

3. Határozd meg az alábbi mátrixok inverzét!

a) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

(ZH, 2006. október 26.)

b) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{pmatrix}$$

4. Számítsd ki az alábbi mátrixok rangját!

a) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 & 8 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \\ 9 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

c) $$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & -9 \\ 2 & -4 & 6 \\ -4 & 8 & -12 \end{pmatrix}$$

5. Az A és B $n \times n$-es mátrixokról tudjuk, hogy $\det A \neq 0$, valamint hogy $A \cdot B = \underline{\underline{0}}$. Határozd meg a B mátrixot! (Itt $\underline{\underline{0}}$ a csupa nulla mátrixot jelöli.)

6. Legyen A egy 6×5-ös valós mátrix. Melyek igazak az alábbi állítások közül?

a) Ha az első három sor lineárisan összefüggő, akkor a bal felső 3×3-as aldetermináns 0.
b) Ha a bal felső 3×3-as aldetermináns 0, akkor az első három sor lineárisan összefüggő.
c) Ha az első három és az utolsó három oszlop is lineárisan összefüggő, akkor a $\mathrm{r}(A) \leq 3$.
d) Ha az első két és az utolsó két oszlop is lineárisan összefüggő, akkor a $\mathrm{r}(A) \leq 3$.

7. Legyen A és B $n \times m$-es mátrix. Bizonyítsuk be, hogy $\mathrm{r}(A+B) \leq \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B)$ (ahol r-rel a mátrixok rangját jelöltük). (ZH, 2002. december 10.)

8. Határozd meg az alábbi mátrixok inverzét!

a) $$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ZH, 2005. november 22.)

b) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}$$

9. A c paraméter minden valós értékére határozd meg az alábbi mátrixok rangját!

a) $$\begin{pmatrix} c & 2 & 3 \\ 21 & 12 & 18 \\ -14 & -8 & -12 \end{pmatrix}$$

(ZH, 2006. november 9.)

b) $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2c+7 & 3c-2 & -5 \end{pmatrix}$$

(ZH, 2003. január 9.)

10. Tegyük fel, hogy az A mátrix minden sora számtani sorozat. (Vagyis bármelyik sor elemein balról jobbra végighaladva egy-egy számtani sorozat tagjait kapjuk.) Bizonyítsuk be, hogy $\mathrm{r}(A) \leq 2$ (ahol r a mátrix rangját jelöli). (ZH, 2006. október 26.)

11. Az $(n \times n)$-es A mátrixot akkor nevezzük *nullosztónak*, ha létezik egy olyan $(n \times n)$-es $B \neq 0$ mátrix, amelyre $A \cdot B = 0$ (ahol 0 a csupa nulla mátrixot jelöli). Döntsük el, hogy igazak-e az alábbi állítások:

a) Ha A nullosztó, akkor $\det A = 0$.
b) Ha $\det A = 0$, akkor A nullosztó.

(ZH, 2006. október 26.)

12. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges (de egymással összeszorozható) A és B mátrixra $\mathrm{r}(AB) \leq \min\{\mathrm{r}(A), \mathrm{r}(B)\}$. (ZH, 2001. október 31.)