Bevezetés a Számításelméletbe I.

5. gyakorlat

1. Írd fel az $A(1,1,7)$, $B(3,2,8)$, $C(8,4,8)$ pontokon átmenő sík egyenletét!

2. A (100×100)-as A mátrixra teljesül, hogy minden sorában az elemek összege 1. A (100×100)-as B mátrix minden eleme 2. Határozzuk meg az $A\cdot B$ szorzatot! (ZH, 2006. október 26.)

3. Számold ki az alábbi mátrixokat!

a) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{2008}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{2007}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n}$

4. Írd fel egy olyan sík egyenletét, amely átmegy a $P(1,1,6)$ ponton és tartalmazza az $\frac{x-2}{2}=\frac{z-11}{10}$, $y=1$ egyenletrendszerű egyenest!

5. Legyen A $n\times n$-es mátrix, $x,y\in\mathbb{R}^n$ pedig n magas oszlopvektorok. Bizonyítsd be, hogy ha $x\neq y$, de $Ax=Ay$ akkor $\det A=0$.

6. Legyen A olyan $n\times n$-es mátrix, melyre $A=A^T$ és A^2 főátlójában csak nullák állnak. Igazoljuk, hogy A a nulla mátrix (minden eleme 0). (ZH, 1999. december 16.)

7*. Határozd meg az összes olyan 2×2-es X mátrixot, amelynek minden eleme racionális szám és amelyre $X^{2008}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ teljesül.

8. A (100×100)-as A mátrix első 50 oszlopának minden eleme 3, az utolsó 50 oszlop minden eleme 2. A (100×100)-as B mátrix minden oszlopára teljesül, hogy abban az első 50 elem összege 2, az utolsó 50 elem összege 3. Határozzuk meg az $A\cdot B$ szorzatot! (ZH, 2006. november 9.)

9. Tekintsük az $A=(2,1,4)$, $B=(1,1,6)$, $C=(3,0,1)$, $D=(0,1,1)$, $E=(7,1,3)$ pontokat a szokásos 3 dimenziós térben. Határozzuk meg az A, B és C, illetve C, D és E pontok által meghatározott síkok metszetegyenesének irányvektorát! (ZH, 2007. november 8.)

10. Legyen $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ és $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \\ 10 & -2 \end{pmatrix}$. Oldd meg az $AX=B$ „mátrixegyenletet", vagyis keresd meg az összes olyan X mátrixot, amire az egyenlőség teljesül.

11. Legyenek $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ $(n\times n)$-es mátrixok. Bizonyítsd be, hogy ha A oszlopai lineárisan függetlenek és B oszlopai is lineárisan függetlenek, akkor az $A\cdot B$ mátrix oszlopai is lineárisan függetlenek!

12. A 100×100-as A mátrix főátlójában és a 100-adik sorában mindenhol 1-es áll, az összes többi (9801 darab) eleme 0. Határozzuk meg az A^{100} mátrixot! (ZH, 2004. november 4.)

13. Egy $n\times n$-es A mátrix minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldetermináns értékével. Mi lesz az így kapott n^2 darab szorzat összege?

14. Egy $2k\times2k$-as mátrix főátlójának minden eleme γ, a bal alsó sarkot a jobb felső sarokkal összekötő átló minden eleme δ, a többi elem pedig 0. Számítsd ki a mátrix determinánsát!

15. Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyik/melyek igaz(ak) tetszőleges A négyzetes mátrixra! (0-val jelöltük a csupa nulla mátrixot.)

a) Ha van olyan $k\geq1$ egész szám, amelyre $A^k=0$, akkor $\det A=0$.

b) Ha $\det A=0$, akkor van olyan $k\geq1$ egész szám, amelyre $A^k=0$.

(ZH, 2003. január 9.)