Bevezetés a Számításelméletbe I.

3. gyakorlat

1. Oldd meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket! Használd a Gauss-elimináció módszerét!

a) $\begin{aligned} -x+3y+3z &= 2\\ 3x+y+z &= 4\\ 2x-2y+3z &= 10 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x+3y+2z &= 3\\ 3x+5y+10z &= 5\\ 3x+2y+13z &= 2\\ 6x+13y+17z &= 13 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} x+3y+2z &= 3\\ 3x+5y+10z &= 5\\ 3x+2y+13z &= 2\\ 6x+13y+17z &= 11 \end{aligned}$

2. Döntsük el, hogy a c valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek! Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset! (ZH, 2004. december 14.)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -x & + & 3y & - & z & - & 3w & = & -2\\ 2x & - & 6y & + & 5z & + & 12w & = & 7\\ 3x & - & 9y & + & 5z & + & cw & = & 9 \end{array}$$

3. Lineárisan függetlenek-e az alábbi, $\mathbb{R}^4$-beli vektorrendszerek?

a) $\begin{pmatrix}1\\3\\3\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\5\\2\\13\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\10\\13\\17\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1\\3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\5\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\5\\5\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}1\\3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\5\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\5\\4\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}7\\9\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}33\\\sqrt{2}\\5\\\sqrt{7}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-51\\19\\\sqrt[3]{19}\\44\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\9\\9\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\8\\5\end{pmatrix}$

4. Adjuk meg $\mathbb{R}^3$ (a háromdimenziós valós tér) alábbi alterének egy bázisát:

$$\left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} : 3x+2y+z=0 \right\}$$

5. Adjuk meg a térben az alábbi egyenletekkel megadott S_1, S_2 és S_3 síkok (összes) metszéspontját! (ZH, 2001. október 31., 2004. december 20.)

a) $\begin{aligned} S_1: \quad x+y+z &= 6\\ S_2: \quad 2x+3y-2z &= 0\\ S_3: \quad 5x+7y-3z &= 6 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} S_1: \quad 2x-y+5z &= 3\\ S_2: \quad 3x+2y+6z &= 4\\ S_3: \quad 4x-9y+13z &= 9 \end{aligned}$

6. Döntsük el, hogy a c valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszereknek! Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset! (ZH, 2004. november 4., 2006. október 26.)

a) $\begin{aligned} 2x+6y+z &= -6\\ 2x+11y+11z &= 14\\ 4x+10y+cz &= -20\\ 2x+9y+(c+10)z &= 6 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} -x_1-3x_2+x_3-4x_4 &= 1\\ 5x_1+15x_2-2x_3+26x_4 &= 4\\ 2x_1+6x_2+c\cdot x_4 &= 4\\ 4x_1+12x_2+x_3+(c+14)\cdot x_4 &= 11 \end{aligned}$

7. Határozd meg a metszetét

a) az $x-2=-\frac{y+4}{2}=z-4$ és az $\frac{x-5}{2}=\frac{y-4}{3}=-\frac{z+1}{2}$ egyenletrendszerű egyeneseknek;

b) az $(1,1,1)$ és $(2,2,4)$ pontokon átmenő egyenesnek, valamint a $2x+3y-z=2$ egyenletű síknak; (ZH, 2000. november 2.)

c) az $x-2y+z=0$, az $x+y-z=1$ és a $3x-3y+z=1$ egyenletű síkoknak!

8. Legyenek $\underline{u}$, $\underline{v}$ és $\underline{w}$ a V (tetszőleges) vektortér lineárisan független vektorai. A p valós paraméter milyen értékeire teljesül, hogy az $\underline{a}=\underline{u}-\underline{v}$, $\underline{b}=\underline{u}+\underline{w}$, $\underline{c}=\underline{u}+\underline{v}-\underline{w}$, $\underline{d}=p\cdot\underline{u}+\underline{v}+\underline{w}$ vektorok szintén lineárisan függetlenek? (ZH, 2004. december 14.)

9. Tudjuk, hogy egy vektortérben a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{100}$ vektorok bázist alkotnak. Hány dimenziós a $\langle \underline{v}_1+\underline{v}_2, \underline{v}_2+\underline{v}_3, \ldots, \underline{v}_{99}+\underline{v}_{100}, \underline{v}_{100}+\underline{v}_1 \rangle$ altér? (ZH, 2007. október 24.)

10. Tegyük fel, hogy adott egy lineáris egyenletrendszer, amelyről tudjuk, hogy megoldható és a megoldás egyértelmű. Ha most megváltoztatjuk az egyenletek jobb oldalán álló számokat (de csak azokat), előfordulhat-e, hogy a kapott egyenletrendszernek

a) nincs megoldása; b) végtelen sok megoldása van?