Bevezetés a számításelméletbe I.

1. gyakorlat

1. A z mely értékei mellett merőleges az $(5,-3,2)$ és a $(7,4,z)$ vektor egymásra?

2. Írjuk fel a $(3,4,5)$ ponton átmenő, a $3x+y-3z=8$ egyenletű síkkal párhuzamos sík egyenletét.

3. A c valós paraméter milyen értékeire lesz merőleges a $3x+cy+4z=7$ és a $12x-cy+16z=5$ egyenletű sík? Milyen c esetén fogják egymást metszeni?

4. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amelyik átmegy az origón és merőleges a $(2,3,4)$ vektorra! Írjuk fel az ezzel párhuzamos, $(1,1,1)$ pontot tartalmazó síkét is.

5. Egy sík a koordinátatengelyeket a $(2,0,0)$, $(0,-1,0)$, $(0,0,5)$ pontokban metszi. Írjuk fel az egyenletét.

6. Írjuk fel a $(12,-1,9)$ ponton átmenő és az $x=3+7t,\quad y=-8+5t,\quad z=-t$ egyenletű egyenessel párhuzamos egyenes egyenletét. Állítsuk elő az egyenest két sík metszeteként is!

7. Határozzuk meg a háromdimenziós térben az $(1,1,1)$ és $(2,2,4)$ pontokon átmenő egyenes és a $2x+3y-z=2$ egyenletű sík metszetét.

8. Határozzuk meg a $3x+4y+12z+25=0$ sík és a $(2,3,4)$ pont távolságát.

9. Legyen V az egész számok halmaza. Jelölje $\oplus$ az egész számok összeadását és minden $\lambda \in \mathbf{R}$ skalár, valamint $\underline{v} \in V$ esetén legyen $\lambda \odot \underline{v} = \underline{v}$. Döntsd el, hogy a V halmaz a most definiált $\oplus$ és $\odot$ művelettel vektorteret alkot-e!

10. Legyen V a pozitív valós számok halmaza. Minden $\underline{u}, \underline{v} \in V$ esetén legyen $\underline{u} \oplus \underline{v} = \underline{u} \cdot \underline{v}$ (vagyis $\oplus$ a pozitív valós számok szorzását jelöli) és minden $\lambda \in \mathbf{R}$ skalár, valamint $\underline{v} \in V$ esetén legyen $\lambda \odot \underline{v} = \underline{v}^{\lambda}$. Döntsd el, hogy a V halmaz a most definiált $\oplus$ és $\odot$ művelettel vektorteret alkot-e!

11. Vektorteret alkotnak-e az alábbi halmazok (a valós számok, mint skalárhalmaz felett)?
    (a) Az összes térvektor,
    (b) a sík összes, x vagy y tengellyel párhuzamos vektora,
    (c) az összes $ax+by=c$ alakú egyenlet,
    (d) az összes n-edfokú egyváltozós polinom,
    (e) az összes legfeljebb n-edfokú egyváltozós polinom,
    (f) a folytonos függvények,
    (g) $\{f : f(5)=f(8)\}$.

12. A valós számhármasok terében vektorteret alkotnak-e azok az (x_1,x_2,x_3) vektorok, melyekre
    (a) $x_1 = 2x_2 - 3x_3$,
    (b) $x_1 = 2x_2 - 3x_3 + 2$?

13. Legyen a szokásos 3 dimenziós térben

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Kifejezhető-e (összeadás és skalárral való szorzás segítségével) az $\underline{\mathrm{u}}$, $\underline{\mathrm{v}}$ és $\underline{\mathrm{w}}$ vektorokból az $\underline{\mathrm{a}}$ vektor?
(b) $\mathbf{R^3}$ mely vektorai fejezhetők ki az $\underline{\mathrm{u}}$, v és $\underline{\mathrm{w}}$ vektorokból?

14. Az $\mathbf{R^4}$ vektortér mely vektorai fejezhetők ki a következő vektorok segítségével?

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

15. Legyen V vektortér $\mathbf{R}$ felett. Bizonyítsd be a vektortér-axiómák segítségével, hogy minden $\underline{v} \in V$ vektorra és $\lambda \in \mathbf{R}$ skalárra:
(a) ha $\lambda \cdot \underline{v} = \underline{0}$, akkor $\lambda = 0$ vagy $\underline{v} = \underline{0}$,
(b) $(-1)\underline{v} = -\underline{v}$.