A III. fejezet feladatai

Kulcsszavak: valószínűségi változók együttes eloszlása, együttes eloszlásfüggvény, perem eloszlásfüggvény, diszkrét változók együttes eloszlása, együttes sűrűségfüggvény, perem sűrűségfüggvény, polinomiális eloszlás, többdimenziós normális eloszlás, valószínűségi változók függetlensége, transzformációk, konvolúció, kovariancia, korrelációs együttható, lineáris regresszió, regresszió (feltételes várhatóérték).

III.1 Legyenek $X, Y \in G(p)$ függetlenek. Adja meg a $\mathbf{P}(X = Y)$ valószínűséget!

III.2 Egy autószerelő műhelybe érkezve, két autó van előttünk, az egyiket éppen szerelik. Feltételezve, hogy a szerelési idők egymástól független $E(2)$ eloszlású valószínűségi változók, mennyi a valószínűsége, hogy autónkat 1 (órán) belül megjavítják?

III.3 Legyenek $X, Y \in E(1)$ függetlenek. Bizonyítsa be, hogy $\min\{X, Y\} \in E(2)$ és, hogy $\max\{X, Y\}$ eloszlása megegyezik $X + \frac{1}{2}Y$ eloszlásával!

III.4 A karácsonyfánkon 15 db egymással sorosan összekapcsolt színes égő világít. Az izzók élettartamai egymástól független, külön-külön exponenciális eloszlású valószínűségi változók, melyek várható értéke 30 óra. Amikor elalszik a fény, azonnal kicserélem a kiégett izzót. Adja meg az izzócserék közötti időtartam eloszlását!

III.5 A karácsonyfánkon 15 db egymással sorosan összekapcsolt színes égő világít. Az izzók élettartamai egymástól független, külön-külön exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Milyen kellene, hogy legyen az izzók élettartamának várható értéke ahhoz, hogy 100 órás üzemelés alatt 95%-os valószínűséggel ne kelljen izzót cserélnem?

III.6 Két kiváló Forma 1-es versenyző körideje az időmérő edzésen egyaránt egyenletes eloszlású a $\left[1:21',1:22'\right]$ időintervallumban. (Az óra ezred másodperc pontossággal tud mérni.) Mennyi a valószínűsége, hogy azonos időt fognak menni egy adott körben? Nő, vagy csökken annak valószínűsége, hogy ha mindegyiküknek két kísérlete van, akkor a két-két eredmény minimuma azonos?

III.7 Tegyük fel, hogy minden héten tízmillió szelvénnyel fogadnak. Mennyi annak a valószínűsége, hogy tíz héten keresztül nem lesz ötös találat?

III.8 Pincénkben 2 db párhuzamosan kapcsolt izzó világít. Az izzók élettartamai egymástól független, külön-külön exponenciális eloszlású valószínűségi változók, melyek várható értéke 6 hónap. Csak akkor szoktam izzót cserélni, ha már mindkettő kiégett. Vezesse le az izzócserék közti időtartam eloszlásfüggvényét!

III.9 Legyenek $X, Y \in N(0,1)$ függetlenek, és $Z = |X + Y|$. Határozza meg Z sűrűségfüggvényét!

III.10 Legyenek $X, Y \in E(\lambda)$ függetlenek, és $Z = |X - Y|$. Határozza meg Z sűrűségfüggvényét!

III.11 Legyenek $X, Y \in E(\lambda)$ függetlenek, és $Z = X + \frac{1}{2}Y$. Határozza meg Z sűrűségfüggvényét! Mennyi a Z várható értéke és szórása?

III.12 Egy 32 lapos magyar kártyacsomagból kihúzunk visszatevés nélkül 10 lapot. Legyen X_p, X_z, X_t, X_m rendre a kihúzott piros, zöld, tök és makk színű lapok száma! Adja meg $(X_p, X_z, X_t, X_m)^T$ vektor együttes eloszlását! Igaz-e, hogy $\mathbf{P}(X_p < X_z) = \frac{1}{2}$?

III.13 Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n \in E(\lambda)$ teljesen függetlenek. Határozza meg a $p_k = \mathbf{P}(X_1 + X_2 + \ldots + X_k \leq 1 < X_1 + X_2 + \ldots X_k + X_{k+1})$ valószínűséget! $(1 \leq k \leq n-1)$.

III.14 Az X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} a(x^2 + xy + y^2), \text{ ha } 0 < x,y < 1 \\ 0, \text{ egyébként} \end{cases}.$$

Mennyi az a értéke? Függetlenek-e X és Y?

III.15 Háromszor dobunk egy szabályos dobókockával. X a kapott hatosok száma, Y a kapott páros értékek száma. Adja meg X és Y együttes eloszlását, kovariancia mátrixukat. Függetlenek X és Y?

III.16 Írja fel két független valószínűségi változó együttes sűrűségfüggvényét, ha az első standard normális, a második pedig $0,2$ paraméterű exponenciális eloszlású!

III.17 Legyen $X \in U(0,3)$ és $Y \in U(-1,4)$ független valószínűségi változók. Határozza meg a $\mathbf{P}(X < Y)$ és a $\mathbf{P}(XY < 1)$ valószínűségeket!

III.18 Ha a $\underline{v} = (X,Y)^T$ vektor egyenletes eloszlású az origó középpontú, egységnyi sugarú körlemezen, mi a sűrűségfüggvénye a vektor hosszának, $\|\underline{v}\| = \sqrt{X^2 + Y^2}$ –nek?

III.19 Ha $X, Y \in U(0,1)$, akkor mi a $(X + Y, X - Y)^T$ kétdimenziós valószínűségi változó várható érték vektora és kovarianciamátrixa?

III.20 Legyen az X és Y együttes eloszlásfüggvénye:
$F_{X,Y}(x,y) = x^3 y,\ 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1.$
Mennyi a $\mathbf{P}\left(0,25 \leq X \leq 0,75,\ \ 0,25 \leq Y \leq 0,5\right)$ valószínűség?

III.21 Határozza meg az origó középpontú 1 sugarú körlapon vett egyenletes eloszlás kovarianciamátrixát!

III.22 Legyen az $(X,Y)^T$ vektor valószínűségi változó sűrűségfüggvénye
$f(x,y) = \frac{1}{7}[6x^2y - 12xy + 6y + 18x^2 - 36x + 18],\ x \in [0,1], y \in [0,1].$
Függetlenek a komponensek?

III.23 Két ember mindegyike addig dob fel egy-egy szabályos pénzérmét, amíg az első fej ki nem jön. Mennyi a valószínűsége, hogy mindkettőnek ehhez ugyanannyi dobásra van szüksége?

III.24 Egy jól megkevert 32 lapos magyar kártyacsomagból leosztunk 8-at. Legyen $X = 1$, ha a leosztott lapok között van piros, és $X = 0$, ha nincs. Legyen továbbá $Y = 1$, ha van a nyolc lap között ász, és $Y = 0$ különben. Adja meg X és Y együttes eloszlását!

III.25 Két busz egymástól függetlenül X illetve Y idő alatt éri el a megállót, ahol én várakozom. Bármelyik busszal tudom az utamat folytatni. Mennyi a valószínűsége, hogy $x > 0$ időn belül befut valamelyik, ha $X, Y \in E(\lambda)$ függetlenek?

III.26 Legyenek $X, Y \in U(0,1)$ függetlenek, $Z = \frac{X}{X+Y}$. Számolja ki Z sűrűségfüggvényét!

III.27 Legyen $X \in U(0,1)$. X segítségével generáljon az origó középpontú egységkör kerületén egyenletes eloszlású kétdimenziós véletlen pontot!

III.28 Egy műszerben egy bizonyos főegység átlagos élettartama 2 év, a beépített ellenőrző rendszeré pedig 3 év. A használat során egyik sem öregszik és egyikük tönkremenetele sem függ a másiktól. Mennyi a valószínűsége, hogy az ellenőrző rendszer előbb romlik el, mint a főegység? (Segítség: $X \in E\left(\frac{1}{2}\right)$ a főegység, $Y \in E\left(\frac{1}{3}\right)$ az ellenőrző egység élettartama, függetlenek. Mennyi $\mathbf{P}(Y < X)$?)

III.29 Legyenek $X \in Po(0,5)$ és $Y \in Po(0,1)$ függetlenek!
Mennyi $\mathbf{P}(X + Y = 2)$?

III.30 Legyenek $X \in G(0,5)$ és $Y \in G(0,25)$ függetlenek!
Mennyi $\mathbf{P}(X + Y = k)$, $(k = 2,3,4,\dots)$?

III.31 Számolja ki az $f_X(x) = 1$, $x \in [0,1]$ és az $f_Y(y) = \frac{2y}{5}$, $y \in [2,3]$ sűrűségfüggvények konvolúciós sűrűségfüggvényét, $f_{X+Y}(t)$-t!

III.32 Legyenek $X, Y \in U(0,1)$ függetlenek, $Z = 2X - Y$. Számolja ki Z sűrűségfüggvényét!

III.33 Legyenek $X, Y \in U(0,1)$ függetlenek, $Z = X - Y$. Számolja ki Z eloszlásfüggvényét!

III.34 Bináris, ± 1 értékű egyformán valószínű szimbólumot küldünk át zajos csatornán, ahol a szimbólumhoz tőle független $f(x) = 0,5(1 - 0,5|x|)$, $x \in (-2,2)$ sűrűségfüggvényű zaj adódik. Ha a csatorna kimenete pozitív, akkor 1 mellett, egyébként -1 mellett döntünk. Mennyi a hibás döntés valószínűsége?

III.35 Egy fogorvosi rendelőbe érkezve, ketten vannak előttünk, az egyiknek éppen most kezdték el a kezelését.. A fogorvos egy pácienssel 0,5 paraméterű exponenciális idő alatt végez. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egységnyi időn belül sorra kerülünk? Oldjuk meg a feladatot akkor is, ha párhuzamosan két orvos fogad egyszerre!

III.36 Egy berendezés X ideig működik hibamentesen, és Y idő kell a javításához, ahol $X \in E(\lambda)$ és $Y \in E(\mu)$ egymástól függetlenek. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a gépet a $T > 0$ időtartam alatt legalább kétszer kellett javítani?

III.37 Legyenek $X \in N(5,2)$ és $Y \in N(4,3)$ függetlenek. Adja meg a $\mathbf{P}(X < Y)$ valószínűséget!

III.38 Az emberek testsúlyát $N(75,12)$ eloszlással modellezzük. Ha egy négyszemélyes lift 320 (kg)-os összteherbírású, akkor mennyi a valószínűsége, hogy egy négy fős csoport túlsúlyos lesz?

III.39 Egy üzemben két gép üzemel egymástól független X_1 és X_2 ideig, ahol $X_1, X_2 \in E(0,2)$. A folyamatos gyártáshoz az egyik gép üzemeltetése is elegendő, a másik gép tartalék. Ha az éppen műszakban álló gép meghibásodik, azonnal a tartalékot állítják üzembe. Melegtartalék esetén a tartalékgép is állandóan be van kapcsolva, azaz ilyenkor a folyamatos működési idő $\max\{X_1, X_2\}$. A hidegtartalékolás esetén a tartalék gépet csak az üzembeállítás pillanatában kapcsolják be. Tehát ilyenkor a folyamatos üzemeltetési idő $X_1 + X_2$ lesz.
Határozza meg a folyamatos üzemeltetés idejének várható értékét meleg-és hidegtartalékolás esetén!

III.40 Legyen $X \in E(2)$. Határozza meg a $\mathrm{cov}(X, X^2)$ számot!

III.41 Legyenek $X_1, X_2, \dots, X_n$ független, azonos eloszlású valószínűségű változók. Tegyük fel, hogy $\mathbf{P}(X_i > 0) = 1$. Bizonyítsa be, hogy
$\mathbf{E}\left(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_k}{X_1+X_2+\ldots+X_n}\right) = \frac{k}{n}$!

III.42 Legyen az X valószínűségi változó olyan, hogy
$\mathbf{P}(X > 0) = \alpha, \mathbf{P}(X < 0) = \beta, \mathbf{E}X = a, \mathbf{E}|X| = b$.
Számolja ki a $\mathrm{cov}\left(X, \frac{|X|}{X}\right)$-t!

III.43 Legyenek $X_1, X_2, \dots, X_n$ független, azonos eloszlású valószínűségű változók.
$\mathbf{P}(X_i = 1) = \mathbf{P}(X_i = -1) = \frac{1}{4}, \mathbf{P}(X_i = 0) = \frac{1}{2}$ $(i = 1,2,\dots,n)$. Számítsa ki az $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ valószínűségű változó várható értékét és szórását!

III.44 Legyenek X és Y független valószínűségű változók. Bizonyítsa be, hogy
$\boldsymbol{\sigma}^2(XY) = \boldsymbol{\sigma}^2 X \boldsymbol{\sigma}^2 Y + (\mathbf{E}X)^2 \boldsymbol{\sigma}^2 Y + (\mathbf{E}Y)^2 \boldsymbol{\sigma}^2 X$.

III.45 Legyenek $X_1, X_2, \dots, X_n \in U(0,1)$ teljesen függetlenek. Ezek kijelölnek $n + 1$ db részintervallumot $(0,1)$ –en. Jelölje Y_k a k-adik részintervallum hosszát $(k = 1,2,\dots,n+1)$. Mutassa meg, hogy $\mathbf{E}Y_k = \frac{1}{n+1}$!

III.46 Fodrásznál sorunkra várunk. Mekkora a valószínűsége, hogy az átlagosnál tovább várakozunk, ha a várakozási idő $E(2)$?

III.47 Legyenek $X_1, X_2, \dots, X_n$ független, azonos eloszlású valószínűségű változók, melyeknek létezik a várható értékük és szórásuk: $\mathbf{E}X_i = \mu, \sigma^2 X_i = d^2$. Fejezze ki μ és d függvényében a $\sigma^2\left(\sum_{i=1}^{n} i \cdot X_i\right)$ és $\operatorname{cov}\left(\sum_{i=1}^{n} i \cdot X_i, \sum_{i=1}^{n} X_i\right)$ mennyiségeket!

III.48 Feldobunk három szabályos kockát. Jelölje Y a dobott értékek összegét. Adja meg $\mathbf{E}Y$ és $\sigma^2 Y$-t!

III.49 Legyen $X \in N(0,1)$. Számolja ki $R(X, X^3)$-t!

III.50 Egy kalapban egy-egy cédulára fel vannak írva az $1,2,3$ számjegyek. Egymás után, visszatevés nélkül kiveszünk két cédulát. X az első, Y a második húzás eredménye. Adja meg $R(X,Y)$-t! Függetlenek-e X és Y?

III.51 Bizonyítsa be, ha X és Y azonos szórású valószínűségi változók, akkor $X+Y$ és $X-Y$ korrelálatlanok!

III.52 Legyenek $X, Y \in N(0,1)$ függetlenek! $V = X+Y$ és $W = X-Y+1$. Adja meg a $(V,W)^T$ vektor kovarianciamátrixát!

III.53 Legyenek X, Y független valószínűségi változók, ahol
$\mathbf{E}X = 4, \mathbf{E}Y = 0, \sigma^2 X = 1, \sigma^2 Y = 2$.
Határozza meg az alábbi mennyiségeket:
$\mathbf{E}(5X-6Y)$, $\mathbf{E}XY$, $\sigma^2(5X-6Y+8)$, $\operatorname{cov}(5X,6Y)$!

III.54 Ultizásnál a 32 lapos magyar kártyacsomagból kettőt talonba osztanak. Jelölje X a talonba került piros színű lapok, Y pedig az ászok számát! Számolja ki X és Y kovarianciáját!

III.55 Bizonyítsa be, hogy ha $\mathbf{E}X = \mathbf{E}X^3 = 0$, akkor X és X^2 korrelálatlanok!

III.56 Az X és Y együttes sűrűségfüggvénye: $f_{X,Y}(x,y) = 10x^2 y, 0 \le y \le x \le 1$.
Határozza meg adott $X = x$ feltétel esetén az Y feltételes sűrűségfüggvényét!

III.57 Legyen az X és Y valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{12}{5}(x^2 - xy + y^2) & \text{, ha } x,y \in (0,1) \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}.$$

Számolja ki, az $f_{X|Y}(x \mid y)$ feltételes sűrűségfüggvényt! Számolja ki a kovarianciamátrixot és a $\mathbf{E}(X \mid Y = y)$ regressziós függvényt is!

III.58 Egy kétdimenziós valószínűségi változó első koordinátájának sűrűségfüggvénye $f_X(x) = 2x, 0 < x < 1$. Ha az első koordináta x, akkor ilyen feltétel mellett az Y második koordináta $1+x$ paraméterű exponenciális eloszlást követ. Határozza meg annak valószínűségét, hogy a két koordináta összege kisebb, mint 1!

III.59 Dobjunk n-szer egy szabályos dobókockával! Jelölje X a hatosok, Y pedig a páros dobások számát! Számolja ki a $\mathbf{E}(Y \mid X)$ regressziót!

III.60 Legyen az X, Y együttes sűrűségfüggvénye $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi d^2}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2d^2}\right)$. Határozza meg a $Z = \max\{|X|,|Y|\}$ sűrűségfüggvényét!

III.61 Legyenek az $X, Y \in N(0,1)$ független valószínűségi változók a $\underline{V}$ vektor komponensei! Adja meg a $\underline{V}$ vektor hosszának eloszlásfüggvényét!

III.62 Legyen $X_1, X_2, \ldots X_{10} \in U(0,1)$ teljesen függetlenek. Számolja ki a
$\mathbf{P}\left(\max_{i=1,2,\ldots,10} X_i < 0,5\right)$ és a $\mathbf{P}\left(\min_{i=1,2,\ldots,10} X_i > 0,2\right)$ valószínűségeket.

III.63 X és Y együttes eloszlása kétdimenziós normális $\underline{\mu} = (\mu_1, \mu_2)^T$ várható érték vektorral és
$\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$ kovariancia-mátrixszal. Fejezze ki az $\mathbf{E}(Y \mid X)$ regressziót $\underline{\mu}, \underline{\underline{\Sigma}}$ komponensei és X segítségével!

III.64 Legyenek $X, Y \in U(0,1)$ függetlenek. $\mathbf{P}(3X < Y+1) = ?$

III.65 Egy gabonaraktárban a búzát X kg-os zsákokba adagolják, ahol $X \in N(80,5)$ eloszlást követ. Egy teherautóra 100 zsákot felraknak. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a zsákok összsúlya nem haladja meg a 10 tonnát?

III.66 Az X és Y valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye $f_{X,Y}(u,v) = \frac{4}{3}(u^2 - uv + 2v^2), u,v \in (0,1)$.
Adja meg az $\mathbf{E}(X \mid Y)$ regressziót!

III.67 Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n \in U(0,1)$ teljesen függetlenek. Mennyi az
$Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ szórásnégyzete?

III.68 Legyenek $X, Y \in U(0,1)$ függetlenek és $Z = e^{X+Y}$. Mennyi $\mathbf{E}Z$ és $\sigma^2 Z$?

III.69 Tapasztalatok szerint egy üres vagont X óra alatt lehet feltölteni szénnel és Y óra alatt bauxittal, ahol $X \in E(1)$ és $Y \in E(2)$. Két vagont kezdenek el egyszerre tölteni, az egyiket szénnel, a másikat bauxittal. Mennyi annak a valószínűsége, hogy előbb végeznek a szén berakásával, mint a bauxitéval?

III.70 Egyszerre feldobnak egy kockát és egy pénzdarabot. X a fejdobás, Y a hatosdobás indikátora. $Z = X^2 + Y^2$.
Adja meg Z eloszlását és várható értékét!

III.71 Feldobunk egy kockát. Egy dobozba a dobott értéknek megfelelő fehér golyót rakunk. Ezután a kiegészítjük a dobozban lévő golyók számát 10-re feketeszínű golyókkal. Ezután újra feldobjuk a kockát, és annyi golyót kiveszünk a dobozból visszatevés nélkül, ahányast kaptunk. Jelölje X a kivett golyók közt a fehérek, Y pedig a feketék számát! $\mathbf{P}(X = 3, Y = 3) =?$

III.72 Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n \in N(0,1)$ teljesen függetlenek. Adja meg az $Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ sűrűségfüggvényét!
III.73 Legyenek $X, Y \in U(0,1)$ függetlenek. X-et az x –tengelyre, Y-t az y-tengelyre felmérve, mekkora a keletkező téglalap területének várható értéke és szórásnégyzete?
III.74 Legyenek $X \in E(1)$ és $Y \in N(0,1)$ függetlenek. $Z = X^2, W = 3X - Y$. $\mathrm{cov}(Z,W)$ =?
III.75 Legyenek $X, Y \in U(0,1)$ függetlenek! $\mathbf{P}\left(X + Y < 1,\ XY < \frac{2}{9}\right) = ?$
III.76 Legyenek $X, Y \in N\left(-5,\ 1\right)$ függetlenek! $\boldsymbol{\sigma}(3X - Y) = ?$
III.77 Határozza meg az $f_{X\mid Y}(x \mid y)$ feltételes sűrűségfüggvényt, ha az együttes sűrűségfüggvény $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\left(x^2 - xy + y^2\right)}$!
III.78 Legyen $X \in N(-4,2), Y = 3X + 1, Z = X^2 - 1$. Számolja ki $\mathrm{cov}(Y,Z)$-t!
III.79 Háromszor dobunk egy szabályos kockával. X a legkisebb, Y a legnagyobb érték. Adja meg az $\mathbf{E}(X \mid Y = 3)$ feltételes várható értéket!
III.80 Legyenek $X, Y \in N(0,1)$ függetlenek! Mennyi a $\mathbf{P}(kX < Y)$ valószínűség, ahol $k \in \mathrm{N}$. (Az eredményt a standard normális eloszlásfüggvénnyel, Φ-vel fejezze ki!)
III.81 Legyenek $X, Y \in N(0,1)$ függetlenek! $Z = 3X + Y$. Számolja ki az $\mathbf{E}(Z \mid X)$ regressziót!
III.82 Legyenek $X, Y \in U(0,1)$ függetlenek! Mekkora valószínűséggel lehet az $a = X, b = 1 - X + Y$ és $c = 1 - Y$ véletlen szakaszokból háromszöget szerkeszteni?
III.83 Az X, Y valószínűségi változó pár együttes sűrűségfüggvénye $f_{X,Y}(u,v) = 2(u^3 + v^3)$, ha $0 \leq u, v \leq 1$. $\mathbf{P}(X^2 < Y) = ?$
III.84 Az X, Y valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye $f_{X,Y}(u,v) = \frac{1}{\sqrt{v}}$, ha $0 < u < 1$ és $0 < v < u^2$. $\mathbf{P}(X + Y < 1) = ?$
III.85 Legyenek $X, Y \in Po(2)$ függetlenek. Számolja ki az $\mathrm{R}(X, X + Y - 1)$ korrelációs együtthatót!
III.86 Kétszer feldobunk egy kockát. X az egyes, Y a hatos dobások száma. Legyen $Z = 3X + Y$ és $V = Y - X$. Számolja ki $\mathrm{cov}(Z,V)$-t!
III.87 Legyenek $X, Y \in U(0,1)$ függetlenek, és $Z = X \cdot Y$. Számolja ki Z sűrűségfüggvényét!
III.88 Addig dobunk egy szabályos kockával, amíg hatost nem kapunk. Jelölje X a dobások számát, Y pedig azt, hogy közben hányszor dobunk egyest. Adja meg az $\mathbf{E}(Y \mid X)$ regressziót!
III.89 Legyenek X és Y nulla várható értékű, független, szórással rendelkező valószínűségi változók. Igazolja, hogy $\boldsymbol{\sigma}^2(X \cdot Y) = \boldsymbol{\sigma}^2(X) \cdot \boldsymbol{\sigma}^2(Y)$!
III.90 Legyen $X \in N(m,D),\ Y = 3X + 8,\ Z = 5 - 2X$. Számolja ki az $R(Y,Z)$ korrelációs együtthatót!
III.91 Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n \in U(0,1)$ teljesen függetlenek. Adja meg a $Z = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ eloszlásfüggvényét!
III.92 Legyenek $X \in N(-4,2)$ és $Y \in N(3,1)$ függetlenek! Fejezze ki Φ segítségével a $\mathbf{P}(2X < Y)$ valószínűséget!
III.93 Az X és Y együttes sűrűségfüggvénye $f_{X,Y}(u,v) = \frac{1}{\sqrt{v}}$, ha $0 < u < 1$ és $0 < v < u^2$. Adja meg a perem-sűrűségfüggvényeket! Függetlenek?
III.94 Egy játékos a következő két lottószelvénnyel játszik: 1, 13, 31, 49, 80 illetve 2, 13, 43, 49, 81. Jelölje X azt, hogy hány nyertes szelvényünk van, Y a nyeretlen szelvények száma. Számolja ki az $\mathrm{R}(X - 1, Y + 1)$-t!
III.95 Legyenek $X, Y \in N(0,1)$ függetlenek és $Z = \mathrm{sign}(X) \cdot Y$. Számolja ki Z eloszlásfüggvényét!
III.96 Legyenek $X, Y \in N(0,1)$ függetlenek! $U = 3X + 2Y$ és $V = 2X - Y$. Adja meg az $\mathbf{E}(U \mid V)$ feltételes valószínűséget!
III.97 Egy felhasználónak két szerveren is van e-mail címe. Az egyikre naponta X a másikra Y üzenet érkezik egymástól függetlenül, ahol $X \in Po(3)$ és $Y \in Po(6)$. Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy nap legfeljebb két üzenet érkezik összesen?
III.98 Legyenek $X, Y \in U(0,1)$ függetlenek, $Z = 2X + 1, V = 3Y$. Számolja ki a $\mathbf{P}(V < Z)$ valószínűséget!
III.99 Két kockával dobunk. X a dobott értékek maximuma, Y pedig a minimuma. Adja meg a $\mathrm{cov}(X, 2Y + 1)$-et!
III.100 Legyen az X, Y együttes sűrűségfüggvénye $f_{X,Y}(x,y) = \frac{4}{5}(x + y + xy)$, ha $0 < x < 1$ és $0 < y < 1$. (Különben $f_{X,Y}(x,y) = 0$.) Adja meg az $\mathbf{E}(Y \mid X)$ regressziót.
III.101 Legyen X a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó, $Y = \cos(2\pi X)$ és $Z = \sin(2\pi X)$. Számolja ki a $(Y,Z)^T$ pár kovarianciamátrixát!
III.102 Legyenek X és Y független, azonos eloszlású valószínűségi változók! Legyen $\mathbf{E}X = \mathbf{E}Y = m$ és $\boldsymbol{\sigma}^2 X = \boldsymbol{\sigma}^2 Y = d$. Mennyi $\mathbf{E}(X - Y)^2$?
III.103 Legyen X a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó, melyet kettes számrendszerben írunk fel: $X = 0, X_1 X_2 \ldots$, ahol X_1 és X_2 diadikus tört első és második számjegye. Függetlenek-e X_1 és X_2 ?
III.104 Legyenek $X, Y \in N(0,1)$ függetlenek és $Z = 3X + Y + 1$. Számolja ki az $\mathbf{E}(Z \mid X)$ regressziót!
III.105 Feldobunk tíz kockát. X a hatosok, Y a hárommal oszthatók számát jelöli. Adja meg az $\mathbf{E}(Y \mid X)$ regressziót!
III.106 Tekintsük a 90/5 lottóhúzást! Jelölje X a 45-nél kisebb, Y pedig a hárommal osztható számok számát a kihúzottak között!
Számolja ki a $\mathbf{P}(X = 1, Y = 1)$-t!
III.107 Legyenek $X, Y \in E(1)$ függetlenek, $Z = Y^2 \,\mathrm{tg} X - \frac{Y}{X}$. Számolja ki az $\mathbf{E}(Z \mid X)$ regressziót!
III.108 Számolja ki az $f_{X\mid Y}(x \mid y)$ és az $f_{Y\mid X}(y \mid x)$ feltételes sűrűségfüggvényeket, ha az együttes sűrűségfüggvény

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}\left(x^2-2xy+2y^2\right)}, x,y \in \mathbb{R}.$$

III.109 Legyenek $X,Y \in N(0,1)$ függetlenek és $T = \max\{X,Y\}$ és $W = \min\{X,Y\}$. Számolja ki a T és W együttes sűrűségfüggvényét!

III.110 A kovariancia tulajdonságait felhasználva, bizonyítsa be, hogy tetszőleges A,B eseményekre

$$|\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)| \leq \frac{1}{4}$$

teljesül!

III.111 Két üzemet közös raktárból látnak el nyersanyaggal. Az első üzem havonta $X \in N(150,10)$ a másik üzem pedig az elsőtől függetlenül $Y \in N(210,15)$ mennyiségű nyersanyagot használ fel. Mennyi legyen a nyersanyag a hónap elején a raktárban, hogy az a hónap végéig 99%-os biztonsággal fedezze a két üzem szükségletét?$(\Phi(2,34) = 0,99)$.

III.112 Az X és Y valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0,25(1+xy(x^2-y^2)), & |x| < 1, |y| < 1 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}.$$

Számolja ki a vetületi sűrűségfüggvényeket! Függetlenek X és Y?

III.113 Legyenek $X,Y \in U(0,1)$ függetlenek, $Z_1 = XY$ és $Z_2 = X+Y$. Adja meg a $\underline{Z} = (Z_1,Z_2)^T$ vektor kovarianciamátrixát és várható érték-vektorát!

III.114 Egy pók által rakott peték száma $X \in Po(\lambda)$. Az egyes peték egymástól függetlenül p valószínűséggel pusztulnak el. Jelölje Y a kifejlődött peték számát! Adja meg Y eloszlását!

III.115 Az X,Y pár együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{, ha } 0 < x < y < 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}.$$

Számolja ki a peremsűrűségfüggvényeket! Független-e X és Y?

III.116 Két kockával dobunk. X a hatosok száma, Y pedig a dobott értékek minimuma. $\mathrm{R}(X,Y) = ?$

III.117 Az X,Y pár együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,y) = \begin{cases} 0,8(x^2+xy+2y^2) & \text{, ha } 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}.$$

Számolja ki a $Z = 2X+Y$ sűrűségfüggvényét és várható értékét!

III.118 $X,Y \in U(0,1)$, függetlenek. $\mathbf{P}(X^2+Y^2 < 1 < 2X+Y) = ?$

III.119 Az X,Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 6y^2, & \text{ha } |y| < 1, 0 < x < 1, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}.$$

Mennyi a valószínűsége annak, hogy az (X,Y) pár az $A(0,0), B\left(\frac{1}{2},0\right), C\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$ csúcspontok által meghatározott háromszög belsejébe esik?

III.120 Két kockával dobunk. X az egyesek száma, Y a dobott összeg.
$\mathrm{cov}(X,Y) = ?$

III.121 Az X,Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,y) = \begin{cases} 0,8(x^2+xy+2y^2) & \text{, ha } 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}.$$

Számolja ki az $Z = \frac{X}{Y}$ várható értékét!

III.122 Egy dobozban 1 piros és 3 fehér golyó van. Visszatevéssel húzunk 50-szer. X jelentse a kihúzott pirosak számát az első 30, Y pedig az utolsó 30 húzás során. Határozzuk meg az X és Y korrelációs együtthatóját!

III.123 Az X valószínűségi változó az 1, 2, 3 értékeket rendre 0,2, 0,3, 0,5 valószínűséggel veszi fel, a tőle független Y pedig a 0, 2, 3 értékeket 0,25, 0,5, 0,25 valószínűséggel veszi fel. Határozzuk meg $X \cdot Y$ szórásnégyzetét.

III.124 A $[0,1]$ intervallumban jelöljünk ki találomra három pontot. Határozzuk meg a középpont abcisszájának -azaz x-koordinátájának- az eloszlásfüggvényét.

III. 125 Két szabályos kockát feldobunk. Jelentse X a hatos dobások számát, Y pedig a dobott számok összegét. Adjuk meg X és Y együttes eloszlását!

III. 126 Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlását tartalmazza az alábbi táblázat:

Y \ X	-1	0	1
-1	p	$3p$	$6p$
1	$5p$	$15p$	$30p$

Mekkora a p paraméter értéke? Függetlenek-e X és Y?

III. 127 Először egy szabályos kockával dobunk, majd a dobott értéknek megfelelően kihúzunk lapokat egy 32 lapos kártyatömegből. Jelölje X a kihúzott lapok között található figurás lapok számát, Y pedig legyen a kihúzott királyok száma. Adja meg a $\mathbf{P}(X = 4, Y = 2)$ valószínűséget!

III. 128 Legyen az X és Y együttes sűrűségfüggvénye $f(x,y) = 2e^{-2x-y}$, $0 < x,y < \infty$ (egyébként $f(x,y) = 0$). Határozza meg a peremsűrűségfüggvényeket! Függetlenek-e X és Y?

III. 129 Legyen az X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{4}{5}(x+y+xy), \text{ ha } 0 < x < 1 \text{ és } 0 < y < 1 \\ 0, \text{ egyébként} \end{cases}.$$

Határozza meg a peremsűrűségfüggvényeket! Függetlenek-e X és Y?

III. 130 A $(X,Y)^T$ valószínűségi változó pár együttes sűrűségfüggvénye $f(x,y) = \frac{1}{2}e^{-4y}$, ha $1 < x < 9$ és $y > 0$ (egyébként $f(x,y) = 0$).

a.) Függetlenek-e X és Y?

b.) $E(X+Y) = ?, \sigma^2(X+Y) = ?$

c.) $\mathbf{P}(0 \leq X < 7, Y \geq 1) = ?$

III. 131 Legyen ξ a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó, melyet kettes számrendszerben írunk fel: $\xi = 0,X_1X_2\ldots$, ahol X_1 és X_2 diadikus tört első és második számjegye. Függetlenek-e X_1 és X_2 ?

III. 132 Ultizásnál a 32 lapos magyar kártyacsomagból kettőt talonba osztanak. Jelölje X a talonba került piros színű lapok, Y pedig az ászok számát! Adja meg X és Y együttes eloszlását és kovarianciáját! Függetlenek-e X és Y ?

III. 133 Legyen a $(X,Y)^T$ valószínűségi változó pár együttes sűrűségfüggvénye:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} + \frac{xy}{2\pi e}, & x,y \in [-1,1] \\ \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} & \text{,egyébként} \end{cases}.$$

a.) Adja meg a peremsűrűségfüggvényeket!

b.) Kétdimenziós normális eloszlású-e $(X,Y)^T$?

III. 134 Két biatlon versenyző X illetve Y óra alatt futja a 10 km-es távot, ahol X és Y független exponenciális eloszlású valószínűségi változók $\lambda = 2$ illetve $\mu = 2,1$ paraméterekkel. Ha a két versenyzőből csapatot szervezünk akik 5 km-nél váltják egymást, mennyi a valószínűsége, hogy 20 perc alatt teljesítik a 10 km-es távot?

III. 135 Legyen az $X \in U(0,1)$ valószínűségi változó kettes számrendszerben felírva: $X = 0,X_1X_2\ldots$ Függetlenek-e az X_1 és X_2 digitek?

III. 136 Legyenek $X,Y \in U(0,1)$ függetlenek és $Z = \frac{Y}{1+X}$. Számolja ki a Z várható értékét!

III. 137 Egy szabályos pénzérmét addig dobálok, amíg *másodszorra* nem kapok *fejet*. Jelölje X a szükséges dobások számát. Adja meg X eloszlását, várható értékét és szórásnégyzetét!

III. 138 Két azonos képesség atléta versenyt fut. Mindkettejük eredményét $m = 10.1$ és $\sigma = 0.1$ paraméterű normális eloszlással jellemezhetjük másodpercekben. Mennyi a valószínűsége, hogy az egyik versenyző legalább 0.2 másodperccel legyőzi a másikat?

III. 139 Ha X és Y független valószínűségi változók, határozzuk meg $V = \min\{X,Y\}$ és $W = \max\{X,Y\}$ eloszlásfüggvényét!

III. 140 Legyenek X és Y azonos eloszlású valószínűségi változók. Igaz-e, hogy $\mathbf{E}\frac{X}{X+Y} = \mathbf{E}\frac{Y}{Y+X}$?

III. 141 Egy szabályos kockával dobunk ismételten. X az első dobás, Y a második dobás eredménye. Számoljuk ki $R(X,X+Y)$-t!

III. 142 Legyenek X és Y $n = 1$ és $p = 0,5$ paraméterű független binomiális eloszlású valószínűségű változók. Mutassuk meg, hogy $X+Y$ és $|X-Y|$ bár korrelálatlanok, de nem függetlenek!

III. 143 Legyen $X \in U(0,2)$, azaz a $(0,2)$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó. $Y = \cos X$ és $Z = \sin X$. Határozzuk meg $\operatorname{cov}(Y,Z)$-t! Függetlenek-e Y és Z?

III. 144 Tekintsük a $T = [-2,2] \times [-1,1]$ téglalapon véletlenszerűen kiválasztott P pontot! Igaz-e, hogy a P polárkoordinátái függetlenek lesznek?

III.145 Harisnyákat csomagolnak 100-asával dobozokba. A harisnyák 1%-a selejtes. Ha az üzletben veszünk három dobozt, mekkora valószínűséggel lesz mindháromban ugyanannyi selejtes?

III.146 Legyen $X \in U(0,1)$ és Y sűrűségfüggvénye $f_Y(t) = 2t, t \in (0,1), (f_Y(t) = 0, t \notin (0,1))$. Legyenek X és Y

függetlenek. Számolja ki a $Z = X + Y$ konvolúciós sűrűségfüggvényt

III.147 Ötször feldobunk egy szabályos pénzérmét. Legyen $X = 1$, ha több fejet kaptunk, mint írást, és $X = 0$, ha az írásból kaptunk többet. Az Y valószínűségi változó a fejek számát vegye fel a dobássorozatban. Adja meg az együttes eloszlás táblázatát! Függetlenek-e X és Y? Mekkora a korrelációs együtthatójuk?

III.148 Az X, Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,y) = \begin{cases} 0,8(x^2 + xy + 2y^2) & \text{, ha } 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}.$$

Számolja ki a $\mathbf{P}(Y < X)$ valószínűséget és X várható értékét.

III.149 Legyen X exponenciális eloszlású $\lambda = 3$ paraméterrel, Y pedig normális eloszlású $m = -1$ és $\sigma = 2$ paraméterekkel. Tudjuk, hogy X és Y függetlenek egymástól. Adja meg az együttes sűrűségfüggvényüket. Ha $V = 2X - 1$ és $W = 2 - 5Y$, akkor számolja ki a $\mathrm{R}(V, W)$ korrelációs együtthatót.

III.150 Legyenek $X \in B\left(10, \frac{1}{3}\right)$ (binomiális) és $Y \in Po(2)$ (Poisson) eloszlású független valószínűségi változók. Számolja ki az alábbi mennyiségeket:

a.) $\mathrm{cov}(X - Y, X + Y)$ b.) $\mathbf{E}(2X - 4Y)$ c.) $\boldsymbol{\sigma}^2(2X - 4Y)$.

III.151 Egy dobozban kilenc golyó van, 3 fehér, 3 zöld és 3 piros. Egyesével addig húzunk visszatevés nélkül a dobozból, amíg piros golyót nem kapunk. Jelölje X a kihúzott golyók számát, Y pedig a kísérletben kihúzott fehér színű golyók számát. Adja meg az együttes eloszlásuk táblázatát. Függetlenek?

III.152 Legyen X exponenciális eloszlású $\lambda = 3$ paraméterrel, Y pedig normális eloszlású $m = -1$ és $\sigma = 2$ paraméterekkel. Tudjuk, hogy X és Y függetlenek egymástól. Számolja ki az alábbi mennyiségeket:

a.) $\mathrm{cov}(X - 2Y, X + 2Y)$ b.) $\mathbf{E}(2X - 4Y)$ c.) $\boldsymbol{\sigma}^2(2X - 4Y + 153)$.

III.153 Legyenek $X \in B\left(10, \frac{1}{3}\right)$ (binomiális) és $Y \in Po(2)$ (Poisson) eloszlású független valószínűségi változók. Adja meg az együttes eloszlásukat. Ha $V = 2X - 1$ és $W = 2 - 5Y$, akkor számolja ki a $\mathrm{R}(V, W)$ korrelációs együtthatót.

III.154 Az X, Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,y) = \begin{cases} 0,8(2x^2 + xy + y^2) & \text{, ha } 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}.$$

Számolja ki a $\mathbf{P}(Y < X)$ valószínűséget és X várható értékét.

III.155 Előbb addig dobunk egy szabályos kockával, amíg 6-ost nem kapunk, majd folytatjuk a dobássorozatot egy szabályos pénzérmével, amíg fejet nem kapunk. Jelölje X azt a dobásszámot, amit a kockával és az érmével együtt végrehajtottunk. Adja meg X eloszlását! Mekkora X várható értéke és szórása?

III.156 Véletlenszerűen kiválasztunk 5 pontot az egységnégyzeten. Jelölje X az origóhoz legközelebb eső, bal alsó negyednégyzetbe ($\left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$) eső pontok számát, Y pedig az $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ középpontú, $R = \frac{1}{2}$ sugarú kör belsejébe eső pontok számát. *Számolja ki $\mathbf{P}(X = 3, Y = 2)$ valószínűséget!

III.157 Legyen $X \in N(0, 1)$ és $Y \in E(2)$ függetlenek. Legyen $Z = X - 2Y$ és $V = 3X + Y$. Számolja ki az $\mathrm{R}(Z, V)$ korrelációs együtthatót.

III.158 Egy kalapban 3 cetlire az 1,2 és 3 számjegyek vannak felírva. Egymás után kiveszünk két cédulát. Legyen X a két szám szorzata, Y a párosak száma. Számolja ki az $\mathbf{E}(Y \mid X)$ feltételes várható értéket.

III.159 Legyen az (X, Y) együttes eloszlása egyenletes az origó középpontú egységkörön, azaz

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{, ha } x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & \text{, egyébként.} \end{cases}$$

Számolja ki az X vetületi sűrűségfüggvényét és várható értékét!

III.160 Legyen az (X, Y) együttes eloszlása egyenletes az $A(-\frac{1}{2}, 0), B(\frac{1}{2}, 0)$ és $C\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ pontok által meghatározott H háromszögön, azaz

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{3}} & \text{, ha } (x,y) \in H \\ 0 & \text{, egyébként.} \end{cases}$$

Számolja ki az X vetületi sűrűségfüggvényét és várható értékét!

III.161 Legyenek X_1, X_2, X_3 független 2 paraméterű exponenciális eloszlású változók, $Y = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$. Számolja ki Y várható értékét és szórását.

III.162 Legyenek X, Y független 1 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. $U = X + Y$ és $W = Y - 2X$. Számolja ki az $\mathrm{R}(U, W)$ korrelációs együtthatót.

III.163 Az $(X, Y)^T$ valószínűségi változó pár együttes sűrűségfüggvénye $f(x,y) = \frac{1}{2}e^{-4y}$, ha $1 < x < 9$ és $y > 0$ (egyébként $f(x,y) = 0$).

a.) Függetlenek-e X és Y?

b.) $\mathbf{E}(X - Y) = ?, \boldsymbol{\sigma}(X - Y) = ?$

III.164* Tekintsük az

$$f_{X,Y}(x,y) = 2y + 2x,\ x \in [0,1], 0 \le y \le x,\ f_{X,Y}(x,y) = 0, \text{ egyébként}$$

együttes sűrűségfüggvényt. Legyen $Z = \frac{Y}{X}$. Számolja ki Z eloszlás- és sűrűségfüggvényét.

III.165 Tekintsük az

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}x,\ x,y \in [0,1],\ f_{X,Y}(x,y) = 0, \text{ egyébként}$$

együttes sűrűségfüggvényt. Számítsuk ki az $\mathbf{E}X, \mathbf{E}Y$ várható értékeket és a $\mathrm{cov}(X,Y)$-t.

III.166 Egy bizonyos csavar esetében a selejtes darabok aránya 5%. Egy üzlet 1000 darabot vásárolt a kérdéses csavarból. Mennyi a valószínűsége annak, hogy több mint 60 selejtes csavar lesz köztük?

III.167 Legyenek X és Y független valószínűségi változók, Y egyenletes eloszlású az egységintervallumon,

$$f_X(x) = 2x, x \in [0,1] \text{ és } f_X(x) = 0 \text{ egyébként.}$$

Számolja ki az $X + Y$ (konvolúciós) sűrűségfüggvényt.

III.168 Tekintsük az

$$f_{X,Y}(x,y) = x + y - \frac{1}{2},\ x \in [0,1], y \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right],\ f_{X,Y}(x,y) = 0, \text{ egyébként}$$

együttes sűrűségfüggvényt. Számítsuk ki az $\mathbf{E}(X \mid Y)$ feltételes várható értékeket.

III.169 Egy szigeten az évi középhőmérséklet normális eloszlású 20 celsius várható értékkel és 3 celsius szórással. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a következő 20 évben a középhőmérséklet értékeinek átlaga 15 celsius alatt legyen? (Az eredményt a Φ sztandard normális eloszlásfüggvény segítségével írja fel.)

III.170 Tekintsük az

$$f_{X,Y}(x,y) = y + c \cdot \left(e^{x-1} + \frac{1}{e}\right),\ x,y \in [0,1],\ f_{X,Y}(x,y) = 0, \text{ egyébként}$$

együttes sűrűségfüggvényt. Mennyi a c értéke? Számolja ki a perem-sűrűségfüggvényeket. Függetlenek-e X és Y?

III.171 Tekintsük az

$$f_{X,Y}(x,y) = 2y + 2x,\ x \in [0,1], 0 \le y \le x,\ f_{X,Y}(x,y) = 0, \text{ egyébként}$$

együttes sűrűségfüggvényt. Legyen $Z = \frac{Y}{X}$. Számolja ki Z eloszlás- és sűrűségfüggvényét.

III.172 Egy iskolás korcsoportban minden ötödik gyerek szemüveges. Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy 1500 fős iskolában a szemüveges tanulók száma nem éri el a 280-at? mekkora annak az esélye, hogy még a 250-et sem éri el a szemüvegesek száma?

III.173 Egy borgazdaságban átlagosan 10000 liter bort készítenek évente, a szórás 1000 liter. Feltételezzük, hogy a bor mennyisége közel normális eloszlású. Adjunk meg egy olyan $[10000 - K, 10000 + K]$ intervallumot, amelyre igaz, hogy az idei bor mennyisége 99% eséllyel ebbe az intervallumba esik.

III.174 Válasszunk ki véletlenszerűen két pontot az egységkör kerületén. Jelölje X a két pontot összekötő húr hosszát. Számolja ki X eloszlásfüggvényét.

III.175 Válasszunk ki 10 pontot véletlenszerűen az egységnégyzetben. Legyen X azon pontok száma, amelyek az oldalfelező pontokba rajzolható K négyzet belsejébe esnek. Y jelölje, ennek a K négyzetnek az oldalfelező pontjaiba rajzolt L négyzet belsejébe eső pontok számát. Számolja ki a $\mathrm{cov}(X,Y)$-t.

III.176 Egy párt szimpatizánsai p valószínűséggel mennek el szavazni, amit nem ismerünk. A közvéleménykutatók p-t a megkérdezetteknek a pártot választók relatív gyakoriságával becsüli meg. Mekkora legyen a megkérdezettek n számú mintája, ha azt akarják elérni, hogy a becslés a tényleges p értéktől legfeljebb $0,001$-el térjen el $99,9$%-os megbízhatósággal?

III.177 Legalább hány megfigyelés kell ahhoz, hogy egy 5-nél nem nagyobb szórású valószínűségi változó értékeinek átlaga 95%-os valószínűséggel a várható érték 0,01 sugarú környezetébe essen?

III.178 Egy szerencsejátékos megfigyeli, hogy átlagosan 63 kisérlet után nyer. Legalább hányszor kell kisérleteznie, hogy 0,99 valószínűséggel nyerjen legalább egyszer?

III.179 Egy mérés elvégzéséhez egy pontatlan eszközünk van, ahol a mérés hibája normális eloszlású. A mérést n-szer végezzük el, majd a mérési eredményeket átlagoljuk. Mekkora legyen a mérések száma, hogy legfeljebb 10^{-4} valószínűséggel térjen el az átlag a mérendő értéktől $0,1$-el?

III.180 99%-os valószínűséggel szeretnénk garantálni, hogy 1000 pénzfeldobásból legalább n-szer fejet kapjunk. Hogyan válasszuk meg n-et, ha a fejdobás valószínűsége p?

III.181 Adottak az $X_1, X_2, \cdots, X_{12} \in U(0,1)$ teljesen független véletlen számok. Ezek segítségével generáljunk $N(5,2)$ normális eloszlású véletlen számot!

III.182 Mennyi a valószínűsége annak, hogy 50 darab független és azonos eloszlású valószínűségi változó összege a $[0,30]$ intervallumba esik, ha egy ilyen változó eloszlása a $[0,1]$ intervallumon

a.) egyenletes;

b.) $f(x) = 2x$ sűrűségfüggvény szerint alakul?

III.183 Egy kockát folyamatosan feldobunk addig, amíg a dobások összege meghaladja a 300-at. Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy legalább 80 dobásra van ehhez szükség.

III.184 Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy 10000 pénzfeldobásnál a fejek száma 4800 és 5200 közé esik.

III.185 Egy projektorhoz van összesen100 égőnk, melyek élettartama egymástól független exponenciális eloszlású, 5 óra várható értékkel. Tegyük fel, hogy az égőket egymás után használjuk, azonnal kicserélve azt, amelyik kiégett. Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy 525 óra után még van működő égőnk.

III.186 Az előző feladatban most tegyük fel, hogy minden égő kicserélése független, a $(0, \frac{1}{2})$ intervallumon egyenletes eloszlású ideig tart. Becsüljük meg most annak valószínűségét, hogy 550 óra elteltével már az összes égő kiégett.

III.187 Egy alkatrészgyárban microcheap-ek minőségét automatával ellenőrzik. 1000 termék megvizsgálása után azt találták, hogy 12 volt selejtes. Mekkora valószínűséggel állíthatják azt, hogy a többmilliós készletben a selejtarány nem éri el az 1%-ot?

III.188 Szkennellel kartonból digitális képet állítanak elő, amelyet diszken tárolnak. A konvertálás akkor selejtes, ha a digitális képen vizualizálásakor valamelyik adat nem olvasható. A digitalizálási munka megrendelőjének az az előírása, hogy a többmilliós állományban a selejtes konvertálások aránya ne érje el az 1%-ot legalább 95%-os biztonsággal. Milyen n-től áll fenn a $\mathbf{P}(r_n < 0,02) \geq 0,95$ reláció, ahol r_n jelöli a selejtarányt az n elemű mintában?$(\Phi(1,63) = 0,95)$.

III.189 Egy focicsapat idegenbe megy játszani. A vendéglátó klub 500 jegyet küldött a csapat szurkolóinak. A klub sejtése szerint a jegyek 60%-ka után lesz érdeklődés. Hány 50 fős buszt rendeljenek, ha biztosítani akarják, hogy a jegyet vásárlók 90%-os valószínűséggel felférjenek a buszokra?

III.190* Generáljunk 1000 db $U(0,1)$ teljesen független véletlen számot: $X_1, X_2, \ldots, X_{1000}$.

a.) Becsüljük meg a

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{1000} X_i > 510\right)$$

valószínűséget!

b.) Becsüljük meg a

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{1000} X_i^2 < 32\right)$$

valószínűséget!

III.191 Egy nem szabályos kockán a hatos dobásának ismeretlen p valószínűségét keressük. Hány dobást kell elvégeznünk a kockával ahhoz, hogy a hatos dobás relatív gyakorisága p-t 0,05-nél kisebb eltéréssel közelítse legalább 0,9 valószínűséggel?

III.192 Egy pályaudvaron az újságárus X lapot ad el óránként, ahol $X \in Po(64)$. A Csebisev-egyenlőtlenség segítségével becsülje meg alulról a $\mathbf{P}(48 < X < 80)$ valószínűséget!

III.193 Egy országban a balkezesek aránya 13%. Mennyi a vlószínűsége, hogy 1000 embert kiválasztva a balkezesek száma legalább 120. Adjon becslést erre a valószínűségre!

III.194 Egy társadalomkutató meg akarja becsülni az alkoholisták arányát a munkanélküliek között. Hány megfigyelést végezzen ahhoz, hogy a megfigyelésekből adódó arány a valódi aránytól 90%-os valószínűséggel legfeljebb 2%-kal térjen el?

III.195 A 50 kg-os cementes zsákok súlya normális eloszlást követ 50 kg várható értékkel, $0,5$ kg szórással. Becsülje meg annak a valószínuségét, hogy 50 zsák össztömege kisebb mint 2450 kg.

III.196 Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy 10000 kockadobás összege 34800 és 35200 közé esik.

III.197 Egy termékhalmaz selejtarányának becsléséhez $n = 100$ elemű mintát vesznek. A minta selejtarányával becslik a teljes halmaz ismeretlen p selejtarányát. Mennyire valószínű az, hogy a becslés legfeljebb 1%-kal tér el a tényleges p értéktől?

III.198 Egy célpontra 200 lövést adnak le. A találat valószínűsége minden lövésnél $0,4$. Milyen határok közé fog esni 90%-os valószínűséggel a találatok száma?adódik, azaz a lövések 58 és 101 közé fognak esni legalább 90%-os valószínűséggel.

III.199 Automata minőségvizsgáló $n = 100000$ elemű mintát ellenőriz le egy gyártósoron előállított számítógépes alkatrésztömegből. A vizsgálat után milyen valószínűséggel állíthatjuk, hogy a mintából meghatározott selejtarány a készlet elméleti p selejtvalószínűségétől legfeljebb $0,01$-el tér el?

III.200 Közelítőleg határozzuk meg a $A = \sum_{k=220}^{260} \binom{500}{k}$ összeget!

III.201 Egy üzemben csavarokat csomagolnak. Egy-egy dobozba átlagosan 5000 csavar kerül. A csavarok számának szórása a tapasztalat szerint 20 darab. Mit mondhatunk annak valószínűségéről, hogy egy dobozban a csavarok száma 4900 és 5100 közé esik, ha az eloszlást nem ismerjük.

III.202 Legyen $X \in N(0,1)$. Bizonyítsa be, hogy $\mathbf{P}(X^2 \geq 5) \leq 0,2$!

III.203 Legyen $X \in U(0,4)$ és $Z = (X-2)^2$. Bizonyítsa be, hogy $\mathbf{P}(Z \geq 6) \leq \frac{2}{9}$!

III.204 Egy szavazókörzetben összesen 20000 szavazásra jogosult állampolgár van. Minden szavazó $0,40$ valószínűséggel megy el szavazni, a többi választó szándékától függetlenül. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a szavazás érvényes lesz vagyis, hogy a szavazópolgárok legalább 40%-a részt fog venni a szavazáson?

III.205 Egy termékbemutató szervezésekor $n = 1000$ meghívót küldenek szét. A tapasztalat szerint a meghívottak egymástól függetlenül $p = 0,1$ valószínűséggel fogadják el a meghívást és jelennek meg a rendezvényen. Mekkora teremben kell a rendezvényt megtartani, ha azt akarják, hogy a megjelentek mind le tudjanak ülni legalább 90%-os valószínűséggel? $(\Phi(1,3) = 0,9)$.

III.206 Egy dobozban 4 cédula van, rajtuk a -1, 0, 2, 2 számok. 192-ször húzunk visszatevéssel a dobozból. A centrális határeloszlás tétel alkalmazásával határozzuk meg annak valószínűségét, hogy a kihúzott számok összege legalább 90, de 180-nál kisebb.

III. 207 Egy szövőgép 500 szállal dolgozik. Annak a valószínűsége, hogy egy szál időegység alatt elszakad $0,008$ minden szálra. Határozzuk meg, hogy $0,95$ valószínűséggel milyen határok között várható a szálszakadások száma egy időegység alatt?

III. 208 Legyen X standard normális eloszlású valószínűségi változó! A standard normális eloszlás táblázatának használata nélkül bizonyítsa be, hogy ekkor fennáll a $\mathbf{P}(-3 < X < 3) \geq 1 - \frac{2}{\sqrt{18\pi}}$ egyenlőtlenség!

III. 209 Ha egy gyár egyforma energiaigényű gépe közül átlagosan 70% működik és 30% vár javításra, vagy éppen javítják, akkor átlagosan 210 gép energiaigényét kell kielégíteni. Mennyi energiát kell biztosítani akkor, ha 99,9%-os biztonsággal szeretnénk elérni azt, hogy minden működőképes gép valóban működni tudjon? (Feltesszük, hogy a gépek meghibásodása egymástól független.)

III. 210 Egy tanfolyamra 100 hallgató iratkozik be. Más elfoglaltsága miatt minden hallgató $0,6$ valószínűséggel megy el az egyes órákra. Feltételezzük, hogy egymástól függetlenül látogatják az órákat. Hány fős terem kell ahhoz, hogy az órára érkező hallgatók 90%-os biztonsággal elférjenek a teremben?

III.211* Adottak az $X_1, X_2, \ldots, X_n \in U(0,1)$ teljesen független véletlen számok. Ezek segítségével generáljunk normális eloszlású véletlen számot

III.212 Egy bizonyos csavar esetében a selejtes darabok aránya 5%. Egy üzlet 1000 darabot vásárolt a kérdéses csavarból. Mennyi a valószínűsége annak, hogy több mint 60 selejtes csavar lesz köztük?

III. 213 A Csebisev egyenlőtlenség segítségével becsülje meg, hogy legalább hány megfigyelés kell ahhoz, hogy egy 7-nél nem nagyobb szórású valószínűségi változó értékeinek átlaga 90%-os valószínűséggel a várható érték 0,1 sugarú környezetébe essen?

III. 214. Legyen X egyenletes eloszlású az egységintervallumon, Y pedig exponenciális eloszlású $\frac{1}{2}$ várható értékkel. X és Y függetlenek, $Z = \max\{X, Y\}$. Számoljuk ki a $\mathbf{P}\left(Z < \frac{1}{3}\right)$ valószínűséget.

III. 215. Az X és Y valószínűségi változók közös sűrűségfüggvénye

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{, ha } 0 < y < 1, 0 < x < y \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}$$

Független-e X és Y?

III. 216. Egy dobókockát *kétszer* feldobunk. Legyen X a dobások összege, és Y az első dobás mínusz a második dobás. Adja meg az együttes eloszlást. Függetlenek-e X és Y?

III. 217. (IMSC) Legyenek X, Y és Z független, azonos $G(p)$ (geometriai) eloszlású valószínűségi változók. Számítsuk ki a következő valószínűségeket:

$$\mathbf{P}(X = Y), \mathbf{P}(X \geq 2Y), \mathbf{P}(X + Y \leq Z).$$

III. 218. Legyenek X és Y független azonos eloszlású valószínűségi változók μ várható értékkel és σ szórással. Számoljuk ki $\mathbf{E}[(X - Y)^2]$ értékét.

III. 219. Egy hibátlan érmével dobunk négyszer. Jelölje X illetve Y a dobott fejek illetve írások számát. Számoljuk ki a $Z = XY$ valószínűségi változó várható értékét és szórását.

III. 220. Feldobunk egy érmét hatvanszor, jelölje a fejek számát X. Adjunk felső becslést a $\mathbf{P}(|X - 30| \geq 20)$ valószínűségre a Csebisev-egyenlőtlenség segítségével!

III. 221. Legyen az X és Y valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{12}{5}(x^2 - xy + y^2) & \text{, ha } x, y \in (0,1) \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}.$$

Számolja ki a perem sűrűségfüggvényeket. Függetlenek-e X és Y?

III. 222. Kétszer feldobunk egy kockát. X az egyes, Y a hatos dobások száma.

a.) Adja meg X és Y együttes eloszlását.

b.) Legyen $Z = 3X + 2016$ és $V = 2016 - Y$. Számolja ki Z és V szórását!

III. 223. Legyenek X, Y független, azonos $G(p)$ (geometriai) eloszlású valószínűségi változók. Legyen $U := \min\{X, Y\}$ és $V := X - Y$. Adjuk meg U és V együttes eloszlását és a peremeloszlásokat. Független U és V?

III. 224. Legyenek X_1, X_2, X_3 teljesen független, azonos eloszlású valószínűségű változók, melyeknek létezik a várható értékük. Ekkor mennyi az $\mathbf{E}\left(\frac{X_1+X_2}{X_1+X_2+X_3}\right)$ várható érték?

III. 225. Az X és Y valószínűségi változók közös sűrűségfüggvénye

$$f(x,y) = \begin{cases} xe^{-(x+y)} & \text{, ha } x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}$$

Számolja ki a peremsűrűségfüggvényeket! Független-e X és Y?

III. 226. Egy kalapban egy-egy cédulára fel vannak írva az $1, 2, 3$ számjegyek. Egymás után, visszatevés nélkül kiveszünk két cédulát. X az első, Y a második húzás eredménye. Adja meg $\mathbf{P}(X < Y)$-t és $\boldsymbol{\sigma}^2(X - Y)$-t!

Függetlenek-e X és Y?

III. 227. Legyenek $X \in N(-2,2)$ és $Y \in E(2)$ független valószínűségi változók. Adja meg az együttes sűrűségfüggvényüket és a $Z = (1 - Y) \cdot (X^2 + 1)$ várható értékét.

III. 228. (IMSC) Legyenek $X, Y \in N(1,2)$ függetlenek és $T = \max\{X, Y\}$ és $W = \min\{X, Y\}$. Számolja ki a T és W együttes sűrűségfüggvényét!

III. 229. Legyen X és Y két független egyenletes eloszlású valószínűségi változó a [0, 1] intervallumon. Határozzuk meg az XY szorzatként előálló új változó sűrűségfüggvényét.

III. 230. Legyen X az a szám, ahányszor 1-est látunk, Y az a szám, ahányszor 2-est látunk ha n-szer dobunk egy szabályos kockával. Számoljuk ki e két valószínűségi változó korrelációs együtthatóját.

III. 231. Az X és Y valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0.25(1 + xy(x^2 - y^2)), & |x| < 1, |y| < 1 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}.$$

Számolja ki a vetületi sűrűségfüggvényeket! Függetlenek X és Y?

III. 323. (IMSC) Legyenek $X, Y \in N(0,1)$ függetlenek és $Z = 3 - 2X + 5Y, V = 5 + 3X$. Adja meg az $\mathbf{E}(V \mid Z)$ regressziót és az $f_{Z,V}(z,v)$ együttes sűrűségfüggvényt.

III. 233. 50 számot egészre kerekítünk, majd összeadjuk őket. Tegyük fel, hogy a kerekítés minden számnál független, $U(-0.5, 0.5)$ eloszlású. Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy kerekítés után összeadva több, mint 3-mal különbözik az eredmény a valódi összegtől.

III. 234. Ha X_1, X_2, X_3, X_4 páronként korrelálatlan valószínűségi változók 0 várható értékkel és 1 szórással, számoljuk ki

(a) $X_1 + X_2$ és $X_2 + X_3$;

(b) $X_1 + X_2$ és $X_3 + X_4$ korrelációs együtthatóját.

III. 235. (IMSC) Legyenek $X_1, X_2, \ldots X_k$ független, $(0,1)$-en egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Legyenek $Y = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ és $Z = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$. Határozzuk meg az $\mathbf{E}(Y), \mathbf{E}(Z)$ várható értékeket és $\mathrm{cov}(Y, Z)$ –t.

III. 236. Adott 100 égőnk, melyek élettartama egymástól független exponenciális eloszlású, 5 óra várható értékkel. Tegyük fel, hogy az égőket egymás után használjuk, azonnal kicserélve azt, amelyik kiégett. Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy 525 óra után még van működő égőnk.

III. 237. Számolja ki az $f_X(x) = 1,\ x \in [0,1]$ és az $f_Y(y) = \frac{2y}{5},\ y \in [2,3]$ sűrűségfüggvények konvolúciós sűrűségfüggvényét, $f_{X+Y}(t)$-t!

III. 238. Legyen az X és Y valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{12}{5}(x^2 - xy + y^2) & \text{, ha } x,y \in (0,1) \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}.$$

Számolja ki a kovarianciamátrixot és a $\mathbf{E}(X \mid Y = y)$ regressziós függvényt!

III. 239. Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n \in U(0,1)$ teljesen függetlenek. Mennyi az $Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ várható értéke és szórásnégyzete?

III. 240. Mennyi a valószínűsége, hogy n kockadobás maximuma 5? Mennyi annak a valószínűsége, hogy a minimuma 5? Mekkora a dobott maximum várhatóértéke, ha $n = 10$?