Az I. fejezet feladatai

Kulcsszavak: véletlen kísérlet, esemény, eseményalgebra, valószínűség, feltételes valószínűség, események függetlensége, klasszikus valószínűség, geometriai valószínűség.

I.1 Legyen $A, B \in \Im$ azaz legyen A, B tetszőleges esemény. Adja meg a legbővebb olyan C eseményt, melyre $A \cdot C \equiv A \cdot B$ teljesül!

I.2 Legyen $A, B \in \Im$. Adja meg az A, B-t tartalmazó legszűkebb σ –algebrát!

I.3 Legyen $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \Im$. Bizonyítsa be, hogy
$\mathbf{P}(A_1 \cdot A_2 \cdot \cdots \cdot A_n) \geq \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \cdots + \mathbf{P}(A_n) - (n-1)$.

I.4 Bizonyítsa be, hogy minden $A, B \in \Im$ esetén
$|\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(AC)| \leq \mathbf{P}(B \triangle C)$, ahol $B \triangle C = B\bar{C} + \bar{B}C$!

I.5 Bizonyítsa be, hogy minden $A, B \in \Im$ esetén
$-\frac{1}{4} \leq \mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) \leq \frac{1}{4}$!

I.6 a.) Bizonyítsa be, hogy minden $A, B \in \Im$ esetén $\mathbf{P}(AB)\mathbf{P}(\bar{A}\bar{B}) \leq \frac{1}{4}$!
b.) Mutassa meg, hogy tetszőleges A, B, C eseményekre
$|\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(AC)| \leq \mathbf{P}(\bar{B}C + B\bar{C})$!

I.7 a.) Bizonyítsa be, hogy minden $A, B \in \Im$ esetén
$\mathbf{P}(A \triangle B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - 2\mathbf{P}(AB)$!
b.) Igazolja, hogy tetszőleges A, B eseményekre
$\mathbf{P}^2(A+B) + \mathbf{P}^2(A \cdot B) = \mathbf{P}^2(A) + \mathbf{P}^2(B) + 2\mathbf{P}(A \cdot \bar{B})\mathbf{P}(B \cdot \bar{A})$!

I.8 a.) Bizonyítsa be, hogy minden $A, B, C \in \Im$ esetén
$\mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(AC) - \mathbf{P}(BC) \leq \mathbf{P}(A)$!
b.) Igazolja, hogy tetszőleges A, B, C eseményekre $\mathbf{P}(A \backslash B\bar{C}) + \mathbf{P}(AC \backslash B) = \mathbf{P}(A \backslash B) + \mathbf{P}(AC)$!

I.9 Bizonyítsa be, hogy minden $A, B, C \in \Im$ esetén
$\mathbf{P}(A+B+C) - \mathbf{P}(ABC) \geq \mathbf{P}(B \triangle C)$!

I.10 Bizonyítsa be, hogy minden $A, B, C \in \Im$ esetén
$\mathbf{P}(A \triangle B) \leq \mathbf{P}(A \triangle C) + \mathbf{P}(B \triangle C)$!

I.11 Bizonyítsa be, hogyha $\mathbf{P}(A) = 0,9$ és $\mathbf{P}(B) = 0,8$, akkor $\mathbf{P}(AB) \geq 0,7$!

I.12 A K kísérlet abban áll, hogy véletlenszerűen kiválasztunk egy n elemű permutációt. Ezt megtehetjük pl. úgy, ha egy kalapból egymás után -visszatevés nélkül- kivesszük a számokat tartalmazó cédulákat. Jelentse A_{ij} azt az eseményt, amikor a kiválasztott permutációban az i-edik elem a j-edik helyen áll. Fejezze ki A_{ij}-k segítségével az alábbi eseményeket:
A: „az első elem a másodiktól balra áll”,
B: „az első elem sorszáma legfeljebb j”.

I.13 Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \Im$ és $A = \sum_{i=1}^{n} A_i$. Állítsuk elő A-t egymást kizáró események összegeként!

I.14 Egy egyetemi évfolyamon a lányok közül 60-nak a haja barna, 40-nek a haja és a szeme is barna, 110 lánynak a haja és a szeme közül legalább az egyik barna. Hány barnaszemű lány van az évfolyamon?

I.15 Egy kávéautomata 100 Ft-os érmékkel működik. Egy tetszőleges 100 Ft-os érmét 0,98-as valószínűséggel fogad el. Az automata kijelzője mutatja, hogy még 4 adag kávé van benne. Négyen állnak az automata előtt 1-1 db 100 Ft-os érmével a kezükben, amikor odaérkezem. Mekkora a valószínűsége, hogy jut nekem a kávéból? Mekkora annak a valószínűsége, hogy én iszom a 4 adag közül az elsőt?

I.16 Három kockával dobunk. A: „az összeg 7”, B: „mindegyik páros”, C: ”van közöttük hármas”. Számolja ki a $\mathbf{P}(A \cdot (B + \bar{C}))$ és $\mathbf{P}((A + C)\bar{B})$ valószínűségeket!

I.17 Az ötöslottó (90/5) esetében, melyik lottószám lesz a legnagyobb valószínűséggel a második legnagyobb kihúzott szám?

I.18 Az ötöslottó esetében mennyi a valószínűsége annak, hogy a következő heti lottószámok legnagyobbika kisebb lesz, mint a rákövetkező hét kihúzott számainak legkisebbike?

I.19 Mennyi a valószínűsége annak, hogy a lottón a kihúzott öt szám közül nagyság szerint a középső 50-nél kisebb?

I.20 Egy sakktáblán találomra elhelyezünk 8 bástyát. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a bástyák nem ütik egymást?

I.21 Egy sakktáblán ha elhelyezünk nyolc fehér futót, akkor milyen valószínűséggel nem fogják egymást ütni?

I.22 Feldobunk egyszerre n szabályos dobókockát. Mennyi a valószínűsége annak, hogy
A: az összes kockával ugyanazt az értéket kapjuk?
B: legalább egy hatost dobunk?
C: pontosan egy hatost dobunk?

I.23 Egy urnában a darab fehér és b darab fekete golyó van. $(a, b \geq 2)$. Viszszatevés nélkül kiveszünk két golyót az urnából. Mennyi a valószínűsége annak, hogy

A: a két golyó azonos színű?
B: a két golyó különböző színű?

I.24 Harminc számozott golyót rakunk szét nyolc különböző ládába. (Az elhelyezéskor bármelyik golyót ugyanakkora valószínűséggel tehetünk bármelyik ládába.) Keressük meg annak az elhelyezésnek a valószínűségét, amelynél három láda üres, kettőben három golyó van, kettőben hat és egyben 12 db golyó kerül!

I.25 Tekintsük az összes olyan n hosszúságú sorozatot, amelyek $0, 1, 2$ számokból állnak. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy egy véletlenül választott ilyen sorozat:
A: 0-val kezdődik;
B: pontosan $m + 2$ db 0-át tartalmaz, melyek közül kettő a sorozat végén van;
C: pontosan m db 1-est tartalmaz;
D: pontosan m_0 db 0-át, m_1 db 1-est és m_2 db 2-est tartalmaz.

I.26 Ketten pénzfeldobással játszanak. András nyer, ha egy szabályos érme dobási sorozatában három fej hamarabb következik, mint fej-írás-fej sorozat. Viszont Béla a nyerő, ha mindez fordítva történik, azaz a fej-írás-fej sorozat előbb jön mint fej-fej-fej. Egyenlőek a játék nyerési esélyei? Milyen legyen a fej dobásának p valószínűsége, hogy a játék „fair" legyen?

I.27 Legyen A az az esemény, hogy lottóhúzásnál mindegyik kihúzott szám nem nagyobb mint 50, és B pedig az az esemény, hogy mindegyik kihúzott szám páros. Számoljuk ki a $\mathbf{P}(A), \mathbf{P}(B), \mathbf{P}(AB), \mathbf{P}(A + B)$ valószínűségeket!

I.28 Mennyi a valószínűsége annak, hogy a lottóhúzásnál a kihúzott legnagyobb és legkisebb szám különbsége éppen k? $(4 \leq k \leq 89)$.

I.29 Egy üres téglalap alakú szobában, melynek falai 10 és 5 méter hosszúak, leejtünk egy golyót. Mennyi a valószínűsége, hogy a golyó egy olyan pontban fog megállni, amely közelebb van a szoba egy sarkához, mint a szoba középpontjához?

I.30 Egy 10 cm oldalhosszúságú négyzetrácsos hálózatra leejtünk egy 3 cm átmérőjű köralakú pénzdarabot. Mennyi a valószínűsége, hogy a pénzdarab egy négyzet csúcsát fedi le?

I.31 Egy 20 cm oldalhosszúságú négyzetrácsos padlózatra ledobunk egy 2 cm élhosszúságú játékkockát. Mennyi a valószínűsége, hogy a kocka teljes terjedelmével a padlózat egy négyzetében lesz?

I.32 Mennyi a valószínűsége, hogy egy egységnyi szakaszt véletlenszerűen három részre törünk, a keletkező szakaszokból hegyesszögű háromszög szerkeszthető?

I.33 Az $ABCD$ négyzetben találomra választunk egy P pontot. Mennyi a valószínűsége, hogy P közelebb lesz az AB oldalhoz, mint a négyzet középpontjához?

I.34 Egy d szélességű lécekből álló padlózatra ledobunk egy $s = 2d$ hosszúságú tűt. Mennyi a valószínűsége, hogy a tű két padlórést fog egyszerre metszeni?

I.35 Az egységkör kerületén véletlenszerűen kiválasztunk három pontot: A, B és C-t. Mennyi a valószínűsége, hogy a BAC szög nagyobb lesz 60^o-nál?

I.36 Legyen $P = (a, b)$ az egységnégyzet egy véletlenül kiválasztott pontja és $p(x) = \frac{1}{3}x^3 - a^2x + b$ egy harmadfokú polinom. Mennyi a valószínűsége, hogy $p(x)$-nek pontosan egy, illetve pontosan három valós gyöke van?

I.37 Találomra kiválasztunk egy P pontot az egységkör kerületén, majd egy Q pontot a körlapon. Mennyi a valószínűsége, hogy a QP szakasz hossza nagyobb mint 1?

I.38 A $(0, 2)$ és $(0, 3)$ szakaszokon választunk találomra egy-egy pontot, legyenek ezek x és y. Mennyi a valószínűsége, hogy az x, y és 1 hosszúságú szakaszokból szerkeszthető háromszög?

I.39 A $[0, 1]$ intervallumon találomra kiválasztunk két számot. Mennyi a valószínűsége, hogy az egyik szám több mint kétszerese lesz a másiknak?

I.40 Válasszunk ki egy x és egy y pontot az egységintervallumban! Tekintsük azt a téglalapot, melynek oldalhosszai x és y. Mennyi a valószínűsége, hogy a keletkező téglalap kerülete nagyobb mint 2 és területe kisebb mint $0,25$?

I.41 Vegyünk egy véletlen $P = (a, b)$ pontot az egységnégyzetből. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a $p(x) = ax^2 - 2bx + 1$ polinómnak nincs valós gyöke?

I.42 Egy urnában b darab fekete és r darab fehér golyó van. véletlenszerűen kihúznak egy golyót. A kihúzott golyót és még ugyanolyan színűből c darabot visszatesznek az urnába. Ezt megtesszük egymás után n-szer. Igazolja, hogy ezek után, a fekete golyó kihúzásának valószínűsége $\frac{b}{b+r}$!

I.43 Magyar kártyával huszonegyezünk. A kártya értékei: alsó=2, felső=3, király=4, hetes=7, nyolcas=nyolc, kilences=9, tizes=10, ász=11. Mennyi a valószínűsége, hogy 21-et húzunk, ha a 19-et elértük az ötödik húzás után?

I.44 Egy kalapban tíz cédula van, melyekre a $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ számjegyek vannak felírva. Visszatevéssel kiveszünk két cédulát. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a számjegyek összege i, feltéve, hogy a számjegyek szorzata nem nulla? $(i = 0, 1, \ldots, 18)$.

I.45 Először feldobunk egy szabályos érmét. Ha *fej*, egyszer, ha *írás* kétszer dobunk fel egy szabályos dobókockát. Mennyi a valószínűsége, hogy lesz hatos?

I.46 Egy rekeszben 15 teniszlabda van, melyek közül 9 még használatlan. Három játékhoz kiveszünk találomra három labdát, majd a játék után visszarakjuk azokat a rekeszbe. (Nyilván, ha volt közöttük használatlan, az a játék során elveszti ezt a tulajdonságát.) Mennyi a valószínűsége annak, mindhárom kivételhez 1 új és 2 használt labda kerül a kezünkbe?

I.47 Egy szövegszerkesztő a karaktereket 7 bitbe kódolja, és ezt egy paritásbittel egészíti ki úgy, hogy az 1-ek száma páros legyen. Teszi ezt azért, hogy páratlan paritással hibázást észlelni tudjon. Tegyük fel, hogy nyolc bitet egy olyan csatornán küldi át, amely egy bitet $\frac{1}{10}$ valószínűséggel ront el. Milyen valószínűséggel kapunk a kimeneten úgy nyolc bitet, hogy az hibás, de mégsem tudjuk azt észlelni?

I.48 A vizsgázók 75%-a A szakos, 15%-a B szakos és 10%-a C szakos. Annak az eseménynek a valószínűsége, hogy egy hallgató ötöst kap, az A szakosok esetében $0,4$, a B szakosoknál $0,7$, és a C szakosoknál $0,6$. Ha egy személyről tudjuk, hogy ötösre vizsgázott, akkor milyen valószínűséggel lehet A, B illetve C szakos?

I.49 Három egyforma doboz közül kettőben 2 piros, egyben 1 piros és 1 fehér golyó van. véletlenszerűen kiválasztunk egy dobozt, és abból egy golyót. Ha ez piros, mennyi a valószínűsége, hogy a dobozban maradó golyó színe fehér?

I.50 Egy szabályos kockát addig dobunk fel újra és újra, amíg először hatost nem kapunk. Mennyi a valószínűsége, hogy eközben pontosan egyszer dobunk egyest?

I.51 Egyetlen számmal lottózok. Számaim között a 40-es a középső. Az alábbi három esemény esetleges bekövetkezése közül melyik növeli jobban az ötös találatom feltételes valószínűségét?
A : „az első kihúzott szám a 40-es”,
B : „kihúzták a 40-es számot”,
C : „a 40-es szám a kihúzott számok között a harmadik”.

I.52 Egy szabályos dobókockával addig dobok, amíg ötöst nem kapok. Mennyi a valószínűsége, hogy ezalatt nem dobunk hatost?

I.53 Bizonyítsa be, ha A, B, C teljesen független események, akkor az $A + B$ esemény független $\bar{C}$-től!

I.54 Két konkurens üzletben halat árulnak. Az ”A” árus aszerint alakítja ki az árakat, hogy a ”B” árus az előző nap mennyiért adta a halat. Reggelente ugyanis feldob egy kockát, és ha hatost kap, akkor alámegy 10%-al a ”B” árus tegnapi árának. Viszont, ha nem hatost kap, akkor ugyanazt írja ki ma reggel, amiért a konkurense tegnap árult. ”B” később nyit. Neki az a szokása, hogy feldob egy pénzdarabot, és ha *fej* annak az árnak, amit az ”A” kirakatában lát, veszi a 120%-át, ha *írás* akkor pedig a 80%-át és aznap azon az árfolyamon fog árulni. Ha ”B” vasárnap 10 rúpiáért árulta a halat, mennyi a valószínűsége annak, hogy kedden ”A” is legalább 10 rúpiáért fogja árulni?

I.55 A $19, 26, 54, 89, 90$ számokat játszottuk meg a lottón. Legyen A az az esemény, hogy az első két számot el fogjuk találni, B pedig az, hogy legalább három találatunk lesz. $\mathbf{P}(A + B) = ?$

I.56 Kiválasztunk véletlenszerűen egy pontot az egységnégyzetben. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a pont közelebb van egy oldalhoz, mint a középponthoz? (V.ö. az I. 33 feladattal!)

I.57 a.) András, Béla és Csaba sorsot húznak. Névsor szerint haladva visszatevés nélkül kivesznek egy-egy golyót egy dobozból, melyben eredetileg két fehér és egy fekete színű golyó volt. Az veszít, aki a feketét húzza. A húzást addig folytatják, amíg valakihez nem kerül a fekete golyó. Kinek mennyi rá az esélye?
b.) Mi a feladat megoldása, ha a dobozban eredetileg 5 fehér és egy fekete golyó volt?
c.) Mi a megoldás 7 fehér és egy fekete golyó esetében?

I.58 Az egységnégyzeten kiválasztunk egy P pontot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy P közelebb van a négyzet egy átlójához, mint egy középvonalához?

I.59 Nyári akció során söröskupakokba elhelyeztek egy-egy színes karikát az olimpiai szimbólumból, mind az öt színből összesen ugyanannyit. Ha valakinek összegyűlik mind az öt karikából legalább egy, akkor részt vehet egy sorsoláson. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a pályázáshoz k kupakra van szükség?

I.60 Egy dobozban 100 dobókocka van. Külsőre mind egyformák, de az egyik hamis: mindig hatost dobunk vele. A többi 99 szabályos. Találomra kivéve egyet, legalább hányszor kell vele dobnom, hogy 90%-ig biztos lehessek benne, hogy egy szabályos kockát vettem ki?

I.61 Egy 10x10 cm-es négyzetrácsos hálózatra ledobunk 10 db 2 cm *átmérőjű* pénzdarabot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a pénzek között lesz olyan, amelyik lefedi valamelyik négyzet csúcsát? (V.ö. az I. 30 feladattal!)

I.62 Egy teherautó 100 láda tojást szállít, mindegyik ládában pontosan 1000 tojással. Szállításkor minden tojás 0,001 valószínűséggel összetörhet (a többitől függetlenül). A megrendelő akkor vesz át egy ládát a szállítótól, ha a ládában lévő összetört tojások száma nem haladja meg a 10-et. Menynyi annak a valószínűsége, hogy legfeljebb két ládát nem fognak átvenni?

I.63 Az egységnégyzeten egymástól függetlenül kiválasztunk 10 pontot. Ezek közül vegyük azt, amelyik legközelebb esik az origóhoz. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ez a legrövidebb távolság $\frac{1}{2}$-nél kisebb?

I.64 Az ötöslottó esetében mennyi a valószínűsége annak, hogy több néggyel osztható lottószámot húznak ki, mint hárommal oszthatót?

I.65 Sörös Ivó a nap kétharmadát a falu valamelyik vendéglátóipari egységében tölti. Az öt kocsma közül átlagosan mindegyikben ugyanannyi időt tölt el. Egy fontos üzenetet akarunk neki átadni, sorra vesszük tehát a lehetséges helyszíneket. Már négy kocsmában voltunk, de egyikben sem volt. Mekkora valószínűséggel találjuk meg az ötödik kocsmában?

I.66 A 32 lapos magyar kártyacsomagból kihúzunk hat lapot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy e hat lap között mind a négy szín előfordul?

I.67 Három kockával dobunk. Feltéve, hogy a dobott számok között nincsen két egyforma, mennyi a valószínűsége, hogy legalább az egyiken hatos van?

I.68 Négyszer feldobunk egy szabályos pénzérmét.
A : az első két dobás fej,
B : az utolsó két dobás írás,
C : az első dobás megegyezik az utolsóval.
Számolja ki a $\mathbf{P}(A+B \mid C+B)$ feltételes valószínűséget!

I.69 Két kockával addig dobunk egyszerre, amíg mindkét érték azonos nem lesz. Mennyi a valószínűsége, hogy legfeljebb tízszer kell dobni?

I.70 Egy dobozban összesen 1000 fehér és fekete golyó van. Nem ismert a fehér és fekete golyók aránya. Visszatevés nélkül kivettünk 100 golyót, és azt tapasztaltuk, hogy közöttük 72 fekete és 28 fehér volt. Mekkora ekkor annak a feltételes valószínűsége, hogy a fekete és fehér golyók aránya eredetileg 7:3 volt?

I.71 Egy lakótelepen csótányirtást végeztek. Az első vegykezelés még a csótányok 60%-át irtja ki, de utána a csótányok egyre inkább immunissá válnak, így másodszorra már csak 40%-uk, harmadszorra pedig csak 20%-uk pusztul el. Mennyi a valószínűsége, hogy egy megjelölt csótány
(a) átvészeli a teljes eljárást?
(b) az utolsó irtáskor pusztul el?
(c) túléli a kezelést, ha az első kezelés után még látták élve?

I.72 Igazolja, hogyha $\mathbf{P}(A) = 0,8$ és $\mathbf{P}(B) = 0,9$, akkor $\frac{7}{9} \leq \mathbf{P}(A \mid B) \leq \frac{8}{9}$!

I.73 Legyenek $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = p$. Tegyük fel, hogy A és B függetlenek. Határozza meg annak az eseménynek a valószínűségét, hogy az A és B közül csak az egyik fog bekövetkezni!

I.74 Az I. dobozban egy piros és egy fehér, a II. dobozban két piros és egy fehér golyó van. Feldobnak egy kockát. Ha a dobás eredménye nem nagyobb, mint kettő, a II. dobozból, különben az I. dobozból húznak ki két golyót visszatevéssel. Ha tudjuk, hogy mindkétszer pirosat húznak, akkor melyik dobozból húzásnak nagyobb a feltételes valószínűsége?

I.75 Valaki addig dob ismételten egy kockával, amíg két egymás utáni dobás azonos nem lesz. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ehhez 6 dobásra van szüksége?

I.76 Egy 5 cm-es szakaszon véletlenszerűen megjelölünk két pontot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a keletkező három szakasz között lesz 1 cm-nél rövidebb is?

I.77 Igazolja, hogy tetszőleges A, B, C eseményre
$\mathbf{P}(A+B+C) + (1-\mathbf{P}(A)) \cdot (1-\mathbf{P}(B \mid \bar{A})) \cdot (1-\mathbf{P}(C \mid \bar{B} \cdot \bar{A})) = 1.$

I.78 Három kockával dobunk. Ha 12 lesz az összeg, akkor mekkora valószínűséggel lesz a dobott értékek között hatos?

I.79 Hány véletlenszerűen kiválasztott emberre van ahhoz szükség, hogy közülük legalább egynek legalább 1/2 valószínűséggel ugyanaznap legyen a születésnapja, mint nekem?

I.80 Van-e olyan A és B esemény, ahol $\mathbf{P}(A \mid B) \geq 0,9$ és $\mathbf{P}(B \mid \bar{A}) \geq 0,1$?

I.81 Nem tudom, hogy egy dobozban mennyi fekete és mennyi fehér golyó van, csak azt, hogy van 6 piros golyó is benne. Megmondták, hogy a „fehéret vagy feketét húzok” eseménynek $\frac{3}{5}$, a „pirosat vagy feketét húzok” eseménynek pedig $\frac{2}{3}$ a valószínűsége. Mennyi fehér golyó van a dobozban?

I.82 Egy bináris csatornán $\frac{1}{3}$ valószínűséggel adnak A jelet és $\frac{2}{3}$ valószínűséggel B jelet. Az A-t 11111-el, a B-t 00000-el kódolják. A zajos csatornán átküldve a jeleket, minden bit a többitől függetlenül 0,6 valószínűséggel az ellenkezőjére változhat. A vételi oldalon úgy dekódolnak, hogyha az öt vett jelben több az 1-es A-t, különben B-t vesznek. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a vételi oldalon helyesen dekódolják a jeleket?

I.83 Egy gépjármű-biztosítótársaság az ügyfeleit három osztályba sorolja: jó vezető, átlagos vezető, rossz vezető. A társaság tapasztalata alapján a jó, átlagos és rossz vezetők 0.05, 0.15, illetve 0.3 eséllyel lesznek baleset részesei egy év alatt. Hogyha az ügyfelek 20%-a jó vezető, 50%-a átlagos vezető, és 30%-a rossz vezető, hány százalékuk lesz baleset részese a jövő év folyamán? Hogyha egy adott ügyfélnek nem volt tavaly balesete, milyen valószínűséggel jó, átlagos illetve rossz vezető?

I.84 Egy 10 cm szélességű deszkalapokból készített padlózatra leejtünk tíz 5 cm hosszúságú tűt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy közülük éppen kettő fog metszeni padlórést? (V.ö. az I34 feladattal!)

I.85 Bizonyítsa be, ha az A, B eseményekre teljesül $\mathbf{P}(A), \mathbf{P}(B) \geq 0,85,$ akkor $\mathbf{P}(AB) \geq 0,7$.

I.86 Egy szórakozott polgár elfelejtette bankkártyájának személyi azonosító (PIN) kódját, csak abban biztos, hogy a négy számjegy között pontosan két hármas volt, és az első jegy biztosan nem a nulla volt. Ha tíz másodpercenként beüt egy lehetséges variációt, akkor mennyi az esélye annak, hogy egy órán belül eltalálja a helyes azonosító számot?

I.87 Igazolja, hogy tetszőleges A, B események esetén
$4\mathbf{P}(AB)(1-\mathbf{P}(A+B)) \leq 1.$

I.88 Két urna közül az egyikben 5 fekete és 7 fehér, a másikban 3 fekete és 8 fehér golyó van. Az elsőből találomra átrakunk egyet a másodikba, majd onnan találomra vissza veszünk egyet. Megint az elsőből húzva, mennyi a valószínűsége a fehérnek?

I.89 a.) Az ötöslottó esetében mekkora valószínűséggel lesz 13 a legkisebb kihúzott lottószám?
b.) Mekkora valószínűséggel esik a legnagyobb kihúzott lottószám 80 és 90 közé (a 80-at és a 90-et is beszámítva)?

c.) Mekkora valószínűséggel esik a legkisebb kihúzott lottószám 10 és 20 közé (a 10-et és a 20-at is beszámítva)?

I.90 Két szabályos kockával dobunk. Független-e az alábbi két esemény: a dobott számok összege páros illetve a két szám különbsége abszolút értékben legalább három?

I.91 Eddig tízszer dobtuk fel a szabályos dobókockát, és egyszer sem kaptunk hatost. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a következő tíz dobás során sem kapok hatost?

I.92 Kétszer egymás után feldobunk egy szabályos pénzérmét. A az az esemény, hogy elsőre fejet dobunk, B az az esemény, hogy másodikra dobunk fejet, C pedig, hogy a dobások egyezőek. Bizonyítsa be, hogy az $\{A, B, C\}$ eseményrendszer bár páronként független eseményekből áll, teljesen nem független!

I.93 Egy zajos bináris csatornán az A és B betűkből álló üzenetsorozatokat küldenek át. Az A betüt 000-val a B betűt 111-el kódolják. Az A és B betűk aránya a küldeményben 3:4. A 0 digit 0,2, az 1 digit 0,3 valószínűséggel az ellenkezőjére vált át a csatornában. A vételi oldalon a dekódolásnál a többségi elvet alkalmazzák: pl. egy háromdigites sorozatot A betűnek értelmeznek, ha a nullák száma legalább kettő. Mennyi a hibás dekódolás valószínűsége?

I.94 Igazolja, hogy tetszőleges A, B, C eseményekre
$\mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(AC) \leq \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(BC)$!

I.95 Bizonyítsa be, ha az A, B eseményekre $0,7 = \mathbf{P}(B) \leq \mathbf{P}(A)$ teljesül, akkor $0,57 < \mathbf{P}(A \mid B)$!

I.96 a.) Az A, B, és C városok között a következő utak épültek: A - B, A - C, B - C. Egy téli éjszakán mindhárom utat egymástól függetlenül p valószínűséggel eltorlaszolja a hó. Mennyi a valószínűsége, hogy másnap reggel valamilyen úton el lehet jutni A-ból C-be?
b.) Az A, B, és C városok között a következő utak épültek: A - B, A - B egy másik nyomvonalon is, B - C. Egy téli éjszakán mindhárom utat egymástól függetlenül q valószínűséggel eltorlaszolja a hó. Mi a valószínűsége, hogy másnap reggel valamilyen úton el lehet jutni A-ból C-be?

I.97 Legalább hányszor kell feldobni két szabályos dobókockát ahhoz, hogy legalább 90%-os valószínűséggel kapjunk dupla hatost a dobássorozatban?

I.98 Tekintsük a 90/5 lottóhúzás véletlen kísérletét! Legyen A az az esemény, hogy a legkisebb kihúzott szám sem kisebb 50-nél, B pedig az az
esemény legyen, hogy midegyik kihúzott szám páratlan lesz. Számolja ki a $\mathbf{P}(A + B)$ valószínűséget!

I.99 Legyenek az A és B független események, C pedig mindkettőjüket kizáró esemény. $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(C) = \frac{1}{3}$.
$\mathbf{P}(\bar{A} + B + C) =$?

I.100 András is és Béla is dob két kockával. András összeadja, Béla összeszorozza az általa kapott értékeket.
a.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy András kap nagyobb számot?
b.) Mi a válasz akkor, ha a dupla kockával csak egyet dobnak, és abból határozzák meg a győztest?

I.101 Egy 1 cm-es szakaszon kiválasztunk két pontot. A két pont a szakaszt három részre osztja. Mennyi annak a valószínűsége, hogy lesz olyan szakasz, ami legalább kétszerese egy másiknak?

I.102 Legalább hány szabályos érmét kell feldobni ahhoz, hogy 0,9-nél na gyobb valószínűséggel legyen köztük fej?

I.103 Legyen A, B két esemény, amelyre $2\mathbf{P}(A) = 2\mathbf{P}(A \mid B) = \mathbf{P}(B \mid A) = \frac{1}{2}$. Számítsa ki $\mathbf{P}(A + B)$-t!

I.104 Feldobunk egy szabályos kockát, majd a dobott értéknek megfelelő számú lapot visszatevés nélkül kihúzunk a 32 lapos magyar kártyacsomagból. Mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzott lapok között lesz ász?

I.105 Minimum hány lapot kell kihúzni a 32 lapos kártyacsomagból visszatevés nélkül, hogy 90%-os valószínűséggel legyen közöttük ász?

I.106 A 00000 és a 99999 számok között találomra kiválasztunk egyet. Mennyi a valószínűsége, hogy
A: minden számjegy különböző lesz;
B: minden számjegy egyforma;
C: csak két számjegy egyezik meg;
D: három-kettő számjegy egyezik.

I.107 Mennyi a valószínűsége, hogy az ötöslottó húzásnál
A: a kihúzott számok mindegyike páros;
B: több páros szám lesz mint páratlan;
C: a kihúzott számok a húzás sorrendjében növekedőek.

I.108 a.) Mennyi a valószínűsége, hogy egy négytagú társaságban legyen két ember, akinek azonos napra esik a születésnapja? (A szökőnapokra, február 29, 30, eső szülinapokkal most ne foglakozzunk!)
b.) Mekkora valószínűséggel lesz egy n tagú társaságban legalább két olyan személy, akik ugyanazon a napon ünneplik a szülinapjukat?
c.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy sorban kérdezve az embereket, az n-edik embernél tapasztaljuk először azt, hogy olyan napon ünnepel, ami már bemondtak korábban?

I.109 Az 52 lapos francia kártyacsomagból 4 játékosnak leosztunk 13-13 lapot. Mekkora valószínűsége lesz, hogy
a.) mindenki kap ászt?
b.) csak i játékos kap ászt, $i = 1, 2, 3$?

I.110 $2N$ db molekula mindegyike egymástól függetlenül, véletlenszerűen kerül be a T vagy S térrész valamelyikébe egyaránt $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ valószínűséggel.
Mennyi annak valószínűsége, hogy

A: ugyanannyi molekula lesz T-ben, mint S-ben;
B: T-ben több lesz mint S-ben;
C: mindkét térrészben páros sok molekula lesz.

I.111 Egy dobozban 10 golyó van, pirosak és kékek, mindkét színből legalább egy. Nem ismerjük a doboz tartalmát, bármely összetétel ugyanolyan valószínűségű. Kétszer húzunk a dobozból visszatevéssel, és mindkét golyó színe piros volt. Melyik összetétel a legvalószínűbb?

I.112 Valaki feldob egy kockát, és ha az eredmény k, akkor k piros és $7-k$ fehér golyót beletesz egy úrnába. A dobás eredményét előttünk titokban tartja. Ezután 10-szer húz visszatevéssel az úrnából, és a kihúzott golyó színét mindig megmondja. Ennek alapján kell eltalálni azt, hogy a kockán hányast dobott előzőleg. Hogyan tippeljünk? Mekkora esélyünk van a találatra?

I.113 Egy dobozban 3 golyó van: piros, kék, sárga. Ötször húzunk visszatevéssel. Feltéve, hogy kéket is és sárgát is húzunk legalább kétszer, mennyi a valószínűsége, hogy egyszer sem húzunk pirosat?

I.114 Egy dobozban N piros és M fehér golyó van. Visszatevés nélkül húzva, n húzásból k piros lett. Mennyi a valószínűsége, hogy az első húzás piros volt?

I.115 Feldobunk egy szabályos kockát, majd egy szabályos érmét annyiszor, amennyit a kocka mutat.
a) mennyi a valószínűsége, hogy egyszer sem dobunk fejet;
b) feltéve, hogy egyszer sem dobunk fejet, mennyi a valószínűsége, hogy a kockával 6-ost dobtunk?

I.116 Röntgenvizsgálat során $0,95$ annak a valószínűsége, hogy tbc-s beteg betegségét felfedezik. Annak valószínűsége, hogy egy egészséges embert betegnek találnak $0,001$. A tbc-ben szenvedők aránya a lakosságon belül $0,0001$. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az ember egészséges, ha átvilágításkor betegnek találták?

I. 117 A próbagyártás során két szempontból vizsgálják a késztermékeket. Az A esemény azt jelenti, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott mintadarab anyaghibás, a B pedig az az esemény, hogy a kiválasztott gyártmány mérethibás. Tudjuk, hogy $\mathbf{P}(A)=0,15, \mathbf{P}(B)=0,3$ és $\mathbf{P}(AB)=0,08$. Mennyi annak a valószínűsége, hogy valamelyik termék hibátlan?

I. 118 Mennyi $\mathbf{P}(A \mid \bar{B})$ ha $\mathbf{P}(A)=0,6$, $\mathbf{P}(B)=0,5$ és $\mathbf{P}(A+B)=0,8$?

I. 119 Egy fekete és fehér golyókat tartalmazó urnából kihúzunk n db golyót. Jelentse azt az eseményt, hogy az i-edeiknek kihúzott golyó fehér. ($1 \leq i \leq n$). Fejezzük ki az A_i események segítségével az alábbi eseményeket:
A Mindegyik golyó fehér"
B Legalább egy golyó fehér"
C Pontosan egy golyó fehér"
D Mindegyik golyó ugyanolyan színű"

I. 120 Bizonyítsa be, hogy tetszőleges A, B eseményekre $(\mathbf{P}(AB))^2+(\mathbf{P}(A\bar{B}))^2+(\mathbf{P}(\bar{A}B))^2+(\mathbf{P}(\bar{A}\bar{B}))^2 \geq 0,25$!

I. 121 Ketten sakkoznak. Az A esemény akkor következik be, ha a világossal játszó nyer, a B esemény akkor, ha a sötéttel játszó másik., reminél pedig a C esemény következik be. Fogalmazzuk meg szavakban, mit jelentenek az alábbi események:
a.) $AB+\bar{A}\bar{B}$
b.) $\bar{A}\bar{B}$
c.) $A+B$

I. 122 Egy céltábla tíz koncentrikus körből áll és a sugarakra fennáll a $R_1<R_2<\cdots<R_{10}$ reláció. A_k azt az eseményt jelenti, hogy egy lövés az R_k sugarú körbe esik. Fogalmazzuk meg szavakban, mit jelentenek az alábbi események:
$B=A_1+A_3+A_6$, $C=A_2A_4A_6A_8$, $D=(A_1+A_3)A_6$!

I. 123 Tegyük fel, hogy A, B $\frac{1}{2}$ valószínűségű események. Mutassuk meg, hogy ekkor $\mathbf{P}(AB)=\mathbf{P}(\overline{A}\cdot\overline{B})$!

I. 124 Bizonyítsa be, hogy tetszőleges A, B eseményekre $\mathbf{P}(\bar{A}B+A\bar{B})=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)-2\mathbf{P}(AB)$!

I. 125 Ha az A és B események közül az egyik feltétlenül bekövetkezik, $\mathbf{P}(A \mid B)=\frac{2}{3}, \mathbf{P}(B \mid A)=\frac{1}{3}$, mennyi a $\mathbf{P}(A)$ és $\mathbf{P}(B)$ valószínűség?

I. 126 Legyen $\mathbf{P}(A)=\frac{2}{3}$, $\mathbf{P}(A \mid B)=\frac{2}{3}, \mathbf{P}(B \mid A)=\frac{1}{3}$. Határozza meg a $\mathbf{P}(A+B)$ és $\mathbf{P}(\bar{A} \mid \bar{B})$ valószínűségeket!

I. 127 (De Méré lovag feladványa) Melyik eseménynek nagyobb a valószínűsége: hogy "egy kockával négyszer dobva legalább egyszer hatost dobunk" (A), vagy annak, hogy "két kockával huszonnégyszer dobva legalább egyszer két hatosunk lesz" (B)?

I. 128 Egy urnából, ahol fehér és fekete golyók vannak, véletlenszerűen kiveszünk visszatevéssel két golyót. Bizonyítsuk be, hogy annak a valószínűsége, hogy a golyók ugyanolyan színűek, nem lehet kisebb mint $0,5$.

I. 129 (Pólya-féle urnamodell) Egy urna r darab fekete és s darab fehér golyót tartalmaz. Véletlenszerűen kihúzunk egy golyót. A kihúzott golyót és még plusz c darab ugyanolyan színű golyót visszateszünk az urnába. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az n-edik húzás után a-szor húztuk ki a fekete, és b-szer a fehér golyót? ($a+b=n$).

I. 130 Ha egy szabályos pénzérmét n-szer feldobunk, mennyi a valószínűsége, hogy k-val többször fogunk fejet kapni, mint írást? ($0 \leq k \leq n$).

I. 131 Egy minden oldalán befestett fakockát a lapokkal párhuzamos síkokban 1000 azonos méretű kis kockára fűrészelnek szét. A kapott kis kockákból véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Mennyi a valószínűsége, hogy a kockának éppen k oldala festett? ($0 \leq k \leq 3$).

I. 132 Egy kalapban az angol ABC 26 betűje van. Visszatevéssel 11-szer húzva, a kihúzott betűket sorban egy papírra felírva, mennyi a valószínűsége, hogy a kapott szóból legfeljebb két betűt felcserélve éppen a STATISZTIKA szó jön ki?

I. 133 Egy szabályos érmével n-szer dobva, mennyi a valószínűsége, hogy a fejdobások száma páratlan lesz?

I. 134 Egy szabályos érmével n-szer dobva, mennyi a valószínűsége, hogy
a.) először az n-edikre jön fej?
b.) ugyanannyi fejet dobunk, mint írást?
c.) pontosan két fejet dobunk?
d.) legalább két fejet dobunk?

I. 135 Egy kalapban három cédula van, amelyekre az $1, 2, 3$ számjegyek vannak felírva. Véletlenszerűen egyesével kihúzzuk a cédulákat. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a húzáskor lesz olyan cédula, amelyikre éppen az a szám van felírva, ahányadikként kihúztuk azt?

I. 136 Feldobunk három szabályos pénzérmét. Mennyi a valószínűsége az A, B, C eseményeknek, ahol
A: „legalább két érmével fejet dobunk”,
B: „pontosan két érmével fejet dobunk,
C: „legfeljebb két érmével fejet dobunk” ?

I. 137 A 90/5 lottóhúzás előtt mennyi a valószínűsége, hogy $k = 1, 2, 3, 4, 5$ találatunk lesz?

I. 138 Egy urnában fehér és fekete golyók vannak, melyeket egymás után visszatevés nélkül kihúzunk. Az A vagy a B eseménynek nagyobb-e a valószínűsége, ahol A: ”az első golyó fehér” , és B: ”az utolsó golyó fehér” ?

I. 139 Ha n egyforma ládába elhelyezünk n egyforma golyót úgy, hogy bármely ládába ugyanolyan valószínűséggel tesszük bármelyik golyót, mennyi a valószínűsége annak, hogy mindegyik ládában lesz golyó?

I. 140 Egy 52 lapos francia kártyacsomagból 13 lapot találomra visszatevés nélkül kihúzunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy
a.) a treff király a kihúzott lapok között lesz?
b.) pontosan két treff lesz a leosztott lapok közt?
c.) a treff király és a treff ász a kihúzott lapok közt van?
d.) van treff a leosztott lapok között?

I. 141 Egymás után elhelyezünk $n + 1$ golyót n ládába. Mennyi annak a valószínűsége, hogy pontosan két láda üresen marad?

I. 142 Egy érmét n-szer feldobunk, a ”fej” valószínűsége p. Jelöljük p_n-nel annak valószínűségét, hogy az n dobás során a páros számú fejet dobtunk. Mennyi p_n?

I. 143 Ha x és y két véletlenül választott 0 és 1 közé eső szám, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy $x + y < 1$ és $x \cdot y < 0.16$ lesz ?

I. 144 (*A Buffon-tű probléma,* 1777) Egy szobában egymástól d távolságban párhuzamosan padlórések futnak. Leejtve egy $s < d$ hosszúságú tűt, mekkora a valószínűsége, hogy a tű éppen egy padlórést fog metszeni?

I. 145 Válasszunk ki egy pontot véletlenszerűen az egységnégyzetben, melynek koordinátáit jelölje (a, b). Tekintve a $p(x) = ax^2 - 2bx + 1$ polinomot, mekkora a valószínűsége annak, hogy a $p(x) = 0$ egyenletnek van valós gyöke?

I. 146 Válasszunk ki egy pontot véletlenszerűen az egységnégyzetben, melynek koordinátáit jelölje (a, b). Mekkora a valószínűsége annak, hogy a pont közelebb van a négyzet egy oldalához, mint egy átlójához?

I. 147 Az egységintervallumban véletlenszerűen kijelölve két pontot, mekkora a valószínűsége, hogy a keletkező három szakaszból háromszög szerkeszthető?

I. 148 Egy szobában egymástól d távolságban párhuzamosan padlórések futnak. Leejtve egy $s < d$ átmérőjű pénzdarabot, mennyi a valószínűsége, hogy a pénz éppen egy padlódeszka belsejébe esik, azaz nem metszi a padlórést?

I. 149 Egy $d = 10$ cm oldalhosszúságú négyzetrácsos padlózatra leejtünk egy $s = 3$cm átmérőjű pénzdarabot.
a.) Mennyi a valószínűsége, hogy a pénz teljes terjedelmével egy négyzet belsejébe fog esni?
b.) Mennyi a valószínűsége, hogy hússzor végrehajtva a kísérletet, az esemény éppen ötször következik be?

I. 150 Egy $d = 10$ cm oldalhosszúságú négyzetrácsos padlózatra leejtünk egy $s = 3$cm hosszú tűt. Mennyi a valószínűsége, hogy a tű teljes egészében egy négyzet belsejébe kerül?

I. 151 Egy $a = 1, b = 2$ oldalhosszúságú téglalapon kiválasztunk egy pontot. Mennyi a valószínűsége, hogy a pont közelebb van egy csúcshoz, mint a középponthoz?

I. 152 Ketten megbeszélik, hogy de. 10 és 11 óra között egy meghatározott helyen találkoznak. Megállapodás szerint, aki korábban érkezik 20 percet vár a másikra, és csak azután távozik. Mennyi a találkozás valószínűsége, ha mindketten véletlenszerűen érkeznek?

I. 153 Egy egységnyi hosszúságú szakaszon találomra választunk két pontot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy ezek közelebb vannak egymáshoz, mint bármelyik végponthoz?

I. 154 Egy ötemeletes házban az emeletek között 6 m távolság van, a földszint és az első emelet között 8 m. Ha a liftajtó 2 m, mennyi a valószínűsége annak, hogy a lift megakadásakor az ajtót teljes egészében fal takarja?

I. 155 Az ABCD egységnégyzeten véletlenszerűen kiválasztva egy pontot, mennyi a valószínűsége, hogy a pont közelebb lesz a négyzet középpontjához, mint az AB oldalhoz?

I. 156 Egy egységnyi hosszú szakaszt eltörünk, majd a hosszabbik részt újból eltörjük. Mennyi a valószínűsége, hogy a keletkező három szakaszból lehet háromszöget szerkeszteni?

I. 157 Számoljuk ki annak feltételes valószínűségét, hogy két kockával dobva mindkét érték páros feltéve, hogy összegük legalább tíz!

I. 158 A 32 lapos magyar kártyából három lapot húzunk egymás után visszatevés nélkül. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az első kihúzott lap hetes, a második kilences, a harmadik ismét hetes?

I. 159 Egy rekeszben 15 teniszlabda van, melyek közül 9 még használatlan. Az első játékhoz kiveszünk találomra három labdát, majd a játék után visszarakjuk azokat a rekeszbe. (Nyilván, ha volt közöttük használatlan, az a játék során elveszti ezt a tulajdonságát.) A második játékhoz ismét találomra veszünk ki három labdát. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az utóbb kivett labdák mind még használatlanok lesznek?

I. 160 Hat doboz mindegyikében hat-hat darab golyó van, melyek között rendre $1, 2, 3, 4, 5, 6$ darab fehér színű található (a többi fekete). Egy dobozt véletlenszerűen kiválasztunk, majd abból visszatevéssel három golyót kihúzunk. Ha azt tapasztaljuk, hogy mindhárom golyó fehér színű, mennyi annak a valószínűsége, hogy a csupa fehér golyót tartalmazó dobozt választottuk ki előzőleg?

I. 161 Mennyi $\mathbf{P}(A|\bar{B})$, ha $\mathbf{P}(A) = 0,6, \mathbf{P}(B) = 0,5$ és $\mathbf{P}(A + B) = 0,8$?

I. 162 Két kockával dobunk. Mondjunk olyan eseményeket ezzel a kísérlettel kapcsolatban, amelyek függetlenek, és olyanokat amelyek nem függetlenek egymástól!

I. 163 Az A és B események közül legalább az egyik mindig bekövetkezik. Ha $\mathbf{P}(A|B) = 0,2$ és $\mathbf{P}(B|A) = 0,5$, mennyi $\mathbf{P}(A)$ és $\mathbf{P}(B)$?

I. 164 Három szabályos kockával dobunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy van hatos értékünk, ha tudjuk, hogy mindegyik dobás páros lett?

I. 165 Egy urnában b darab fekete és r darab fehér golyó van. Véletlenszerűen kihúznak egy golyót. A kihúzott golyót és még ugyanolyan színűből c darabot visszatesznek az urnába. A kísérlet eredményét nem ismerve, másodszorra mi húzunk az urnából. Feltéve, hogy a második húzáskor fekete golyót húzunk, mennyi a valószínűsége annak, hogy az első húzáskor is fekete volt az eredmény?

I. 166 Három szabályos kockát feldobunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a dobások között van hatos, ha mindegyik kockán különböző érték van?

I. 167 Egy ládában 100 darab játékkocka van, melyek közül 99 teljesen szabályos, egy pedig hamis olyan értelemben, hogy vele mindig hatos dobható csak. Ha véletlenszerűen kiveszünk egy kockát a ládából és azt tízszer feldobva mindig hatost kapunk, mennyi a valószínűsége, hogy éppen a hamis kockát vettük ki előzőleg?

I. 168 Két politikus x és y egymástól függetlenül hazudnak illetve mondanak igazat 2/3 illetve 1/3 valószínűséggel. Feltéve, hogy x azt állítja, hogy "y hazudik", mennyi a valószínűsége, hogy y igazat mond?

I. 169 Két urna közül az egyikben n fekete és m fehér, a másikban N fekete és M fehér golyó van. Az elsőből találomra átrakunk egyet a másodikba, majd onnan találomra vissza veszünk egyet. Megint az elsőből húzva, mennyi a valószínűsége a fehérnek?

I. 170 Egy kalapban tíz cédula van, melyekre a $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ számjegyek vannak felírva. Visszatevéssel kiveszünk két cédulát. Jelölje Y a számjegyek összegét, X pedig a számjegyek szorzatát. Adjuk meg a $\mathbf{P}(Y = i \mid X = 0)$ valószínűségeket! $(i = 0, 1, \ldots, 18)$.

I. 171 Egy perzsa sah egyszer egy elítéltnek azt mondta, hogy tetszés szerint elhelyezhet 50 fehér és 50 fekete golyót két egyforma vázába. Az egyikből majd a sah kihúz egy golyót, és ha az fehér, megkegyelmez. Ha viszont a kihúzott golyó fekete, vagy kiderül, hogy nem mindegyik golyó volt a vázákba berakva, esetleg a kiválasztott vázában nem volt semmilyen golyó, az ítélet halál. Hogyan kell szétosztania az elitéltnek a golyókat, hogy a megkegyelmezés valószínűsége maximális legyen?

I. 172 A bináris szimmetrikus csatorna egy olyan bináris bemenetű és bináris kimenetű csatorna, melynek minden bemenete $p = 0,01$ valószínűséggel az ellenkezőjére vált a kimenetkor. A 0 forrásbitet 000-val, az 1 forrásbitet 111-gyel küldjük át. A dekódoló többségi döntést hoz. Ha a 0 és 1 forrásbitek előfordulásának egyaránt $0,5$ a valószínűsége, akkor adja meg a dekódolás hibavalószínűségét!

I.173 Mekkora valószínűséggel lehet a kihúzott lottószámok között több öttel osztható, mint 6-tal osztható?

I.174 A 32 lapos magyar kártyacsomagból visszatevés nélkül háromszor kiválasztunk 3-3 lapot. Egy kiválasztás során kivett három lapot a következő kiválasztáskor nem tesszük vissza. Mennyi a valószínűsége, hogy mindhárom választáskor van a kiválasztott lapok között ász?

I.175 Kilenc kartonlapra három színnel (piros, kék, zöld) felírjuk az 1, 2, 3 számjegyeket, majd a kartonokat összekeverve belerakjuk egy kalapba. Ezután visszatevés nélkül addig húzunk egyenként a kartonokat, míg piros színű számot nem kapunk. Mennyi a valószínűsége, hogy az így kihúzott kartonok között van hármas?

I.176 Kilenc kartonlapra három színnel (piros, kék, zöld) felírjuk az 1, 2, 3 számjegyeket, majd a kartonokat összekeverve belerakjuk egy kalapba. Ezután visszatevéssel addig húzunk egyenként a kartonokat, míg piros színű számot nem kapunk. Mennyi a valószínűsége, hogy az így kihúzott kartonok között van hármas?

I.177 Egy dobozban kilenc golyó van, 3 fehér, 3 zöld és 3 piros. Egyesével addig húzunk visszatevés nélkül a dobozból, amíg piros golyót nem kapunk. Mekkora valószínűséggel lesz a kihúzott golyók között zöld színű?

I.178 Két pontot véletlenszerűen egymástól függetlenül kiválasztunk az egységnégyzeten. Mennyi a valószínűsége annak, hogy legalább az egyik pont távolabb lesz a négyzet középpontjától mint $\frac{1}{4}$?

I.179 Az egységintervallumon véletlenszerűen, egymástól függetlenül kiválasztunk 10 pontot. Mekkora annak a valószínűsége, hogy lesz közöttük olyan pont, amely az intervallum felezőpontjától $\frac{1}{3}$-nál távolabb esik?

I.180 Az $ABCD$ egységnégyzet CD oldalán találomra kiválasztunk egy E pontot. Mennyi a valószínűsége, hogy a keletkezett AED háromszög területe nagyobb lesz $\frac{1}{3}$-nál?

I.181 Egy kalapban 5 piros és 5 fehér golyó van. Visszatevés nélkül egymás után kihúzunk 3 golyót. Mekkora valószínűséggel lesz a harmadik húzás színe piros, ha az első két húzás színe megegyezett?

I.182 Egy ládában 20 darab játékkocka van, melyek közül 19 teljesen szabályos, egy pedig hamis olyan értelemben, hogy vele 90%-os valószínűséggel dobható hatos. Ha véletlenszerűen kiveszünk egy kockát a ládából és azt négyszer feldobva mindig hatost kapunk, mennyi a valószínűsége, hogy éppen a hamis kockát vettük ki előzőleg?

I.183 Egy gépjármű-biztosítótársaság az ügyfeleit három osztályba sorolja: jó vezető, átlagos vezető, rossz vezető. A társaság tapasztalata alapján a jó, átlagos és rossz vezetők 0,01, 0,1, illetve 0,25 eséllyel lesznek baleset részesei egy év alatt. Hogyha az ügyfelek 15%-a jó vezető, 55%-a átlagos vezető, és 30%-a rossz vezető, hány százalékuk lesz baleset részese a jövő év folyamán? Hogyha egy adott ügyfélnek nem volt tavaly balesete, milyen valószínűséggel rossz vezető?

I.184 Két urna közül az egyikben 5 fekete és 7 fehér, a másikban 3 fekete és 8 fehér golyó van. Az elsőből találomra átrakunk kettőt a másodikba, majd onnan találomra vissza veszünk egyet. Megint az elsőből húzva egyet, mennyi a valószínűsége a fehérnek?

I.185 András és Béla játszanak. Ismételten egyszerre feldobnak három kockát. Ha páros értékű dobásból van több, akkor András fizet 100 Ft-ot Bélának, ellenkező esetben Béla fizet 100 forintot Andrásnak. Kezdetben mindkettőjüknek 500 Ft-ja volt. A játék akkor fejeződik be, ha valamelyik játékosnak elfogy a pénze. Jelölje X a játék során végrehajtott dobások számát! Adja meg az X eloszlását!

I.186 Egy halastóban 1000 db hal van. Egyik nap kihalásznak közülük 100-at. Ezeket valamilyen módon megjelölik, majd visszadobják őket. Másnap megint kihalásznak 100 halat. Mekkora valószínűséggel lesz közöttük legalább 3 megjelölt hal?

I.187 Hány dobókocka esetén lesz a legnagyobb a valószínusége annak, hogy pontosan egy hatos van a dobott számok között?

I.188 Egy üzemben három gép dolgozik. Az első a termelés 25%-át adja és 5%-os selejttel dolgozik. A második 35%-ot termel és 4%-os selejtet ad, a harmadig pedig 40%-ot ad 2%-os selejttel. A termékek közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet véletlenszerűen, és azt tapasztaljuk, hogy selejtes. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott terméket az első gépen gyártották?

I.189 Egy urnában 3 piros és 7 fekete golyó van. András és Béla visszatevés nélkül felváltva húznak az urnából egészen addig, amikor először piros golyó kerül elő. Ha András húzott először, mennyi a valószínűsége, hogy ő húz először piros golyót?

I. 190. Egy dobozban 3 golyó van: piros, fehér és zöld. 5-ször húzunk visszatevéssel. Feltéve, hogy fehéret és zöldet is húzunk legalább kétszer, mennyi annak a valószínűsége, hogy egyszer sem húzunk pirosat?

I. 191. Mennyi a valószínűsége, hogy egy szabályos kockával 12-szer dobva, minden szám legalább egyszer kijött?

I. 192. Választunk két számot egymástól függetlenül az egyenletes eloszlás szerint a [0,1] intervallumról. Mennyi a valószínűsége annak, hogy közelebb vannak egymáshoz, mint bármely végponthoz?

I. 193. (IMSC) Válasszunk egy pontot egyenletes eloszlással egy egyenlő oldalú háromszög belsejében, mely háromszögnek minden oldala 1 hosszúságú. Jelölje X e pontnak a távolságát a háromszög legközelebbi *oldalától*. Határozzuk meg a X valószínűségi változó eloszlás- és sűrűségfüggvényét.

I. 194. Közúti forgalmi ellenőrzések és mérések során megállapították, hogy egy adott városban a jármű-vek 50%-a személyautó, 35%-a teherautó, a fennmaradó rész pedig egyéb kategóriába sorolható jármű. A személyautók 15%-ánál, a teherautók 20%-ánál, az egyéb kategóriájú járművek 35%-ánál valami műszaki probléma fedezhető fel. Ebben a városban egy járművet megállítva mennyi annak a valószínűsége, hogy

a) a műszaki állapota kifogásolható;

b) ha a műszaki állapota kifogásolható, akkor az teherautó?

I. 195. Választunk két számot egymástól függetlenül a geometriai valószínűség szerint a $[-1, 1]$ intervallumról. Mennyi a valószínűsége, hogy valamelyik szám kisebb, mint a másik négyzete?

I. 196. A 32 lapos kártyacsomagból visszatevés nélkül kihúzunk 7 lapot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a lapok között mind a négy szín előfordul?

I. 197. Péter és Judit találkozót beszélnek meg este 7 és *fél nyolc* között. Mivel tömegközlekedési eszközzel utaznak, bizonytalan az érkezésük. Érkezésük független és egyenletes a 7-7.30 időintervallumban. Judit 5 percet hajlandó várni Péterre, míg Péter 10 percet Juditra. Mekkora valószínűséggel sikerül találkozniuk?

I. 198. A felnőtt korú munkaképes lakosság 20%-a beszél legalább egy idegen nyelvet és 80%-a nem beszél idegen nyelven. A nyelvet beszélők 0.025, a nyelvet nem beszélők 0.10 valószínűséggel munkanélküliek egy adott időpillanatban.

a) Kiválasztva egy embert, mennyi az esélye hogy munkanélküli az adott időpillanatban?

b) Ha a kiválasztott ember nem munkanélküli az adott időpillanatban, mennyi a valószínűsége, hogy nem beszél idegen nyelvet?

I. 199. (IMSC) Tegyük fel, hogy repülés közben egy repülőgép motorjai egymástól (teljesen) függetlenül $1 - p$ valószínűséggel hibásodnak meg. Ha egy repülőnek a repüléshez a motorjainak legalább felére van szüksége, milyen p értékekre biztonságosabb egy ötmotoros repülőgép, mint egy háromotoros?

I. 200. Egy számítógépgyár 3 távol-keleti cégtől szerzi be ugyanazt az alaplapot: egy kínai, egy tajvani és egy koreai cégtől. A kínai beszállítótól az alaplapok 45%-át, melyek 0,5%-a hibás, a tajvani cégtől az alaplapok 30%-át, melyből minden 100-dik hibás. A maradék alaplapokat a koreai cég gyártja 3,5%-os hibaaránnyal. Mennyi a valószínűsége annak, hogy

a) egy alaplapot véletlenszerűen kiválasztva, az jó;
b) az alaplap jó, feltéve, hogy kínai a beszállító;
c) nem koreai az alaplap, feltéve, hogy jó;
d) jó az alaplap, feltéve, hogy nem koreai?

I. 201. A felnőtt korú munkaképes lakosság 20%-a beszél legalább egy idegen nyelvet és 80%-a nem beszél idegen nyelven. A nyelvet beszélők 0.025, a nyelvet nem beszélők 0.10 valószínűséggel munkanélküliek egy adott időpillanatban.
a) Kiválasztva egy embert, mennyi az esélye hogy munkanélküli az adott időpillanatban?
b) Ha a kiválasztott ember nem munkanélküli az adott időpillanatban, mennyi a valószínűsége, hogy nem beszél idegen nyelvet?

I. 202. Egy alkalommal egy szolgáltató egység hibás számlakivonatokat küld ki az ügyfeleinek. A tapasztalat azt mutatja, hogy az emberek 65%-a nézi át a számára elküldött számlakivonatokat, 35%-uk nem nézi át őket. Ha egy ember átnézi a számlakivonatot, akkor 0.55 valószínűséggel találja meg a benne rejlő hibát, ha nem nézi át, akkor biztosan nem találja meg a benne rejlő hibát.
a) Mennyi a valószínűsége, hogy egy ember megtalálja a számára küldött számlakivonatban a hibát?
b) Feltéve, hogy az ember nem találja meg a hibát a számlakivonatban, mennyi a valószínűsége, hogy nem nézte át a kivonatot?

I. 203. Két kalapba számozott golyókat raktunk. Az elsőbe 6 darab pirosat 1-től 6-ig számozva, a másodikba 4 darab fehéret 1-től 4-ig számozva. Kihúzunk mindkét kalapból véletlenszerűen egy-egy golyót.
a) Jelentse az A esemény azt, hogy a kihúzott golyókon lévő számok szorzata 3-mal osztható, B esemény pedig azt, hogy a számok szorzata 10-nél kisebb. Adja meg az események valószínűségeit, valamint azt, hogy mekkora valószínűséggel következik be A, fel-téve, hogy B bekövetkezett!
b) Mennyi a kihúzott golyókon lévő számok szorzatának várható értéke és szórása?

I. 204. Egy férfi és egy nő találkozót beszélt meg 12:30-ra. Ha a férfi 12:15 és 12:45 között folytonos egyenletes eloszlású időben érkezik, és tőle függetlenül a nő 12:00 és 13:00 között folytonos egyenletes eloszlású időben érkezik,
(a) Határozzuk meg annak valószínűségét, hogy aki először érkezik, 5 percnél kevesebbet vár.
(b) Mennyi a valószínűsége, hogy a férfi érkezik elsőnek?