A csoport megoldása

1. Egy szerkezet élettartama exponenciális eloszlású valószínűségi változónak tekinthető 1800 óra várható értékkel. A szerkezet használói a szerkezetet átlagosan napi 1 órát üzemeltetik. Milyen hosszú garanciaidőt adjon a gyártó cég, ha az eladott szerkezeteknek legfeljebb 5%-át akarja garanciálisan cserélni?

Megoldás: Jelölje X egy ilyen szerkezet élettartamát. Ha a garanciaidő N óra, akkor

$$\mathbf{P}(X < N) = F_X(N) = 1 - e^{-\frac{N}{1800}} \leq 0.05$$

Ebből $0.95 \leq e^{-\frac{N}{1800}}$ azaz $N \leq 1800 \cdot \ln \frac{100}{95} = 92.328.$ $\Rightarrow$ Kb. 3 hónapos garancia indokolt.

2. Egy dobozban 5 piros és 8 fehér golyó van. Kihúzunk a dobozból 7 golyót. Mennyi a valószínűsége, hogy páros számú piros lesz a kihúzottak között? Várhatóan hány pirosat húzunk?

Megoldás: Jelölje a X a piros színű golyók számát. $R_X = \{0,1,2,3,4,5\}, \mathbf{P}(X = i) = \frac{\binom{5}{i}\cdot\binom{8}{7-i}}{\binom{13}{7}}$

$$\mathbf{P}\big(\text{páros számú piros lesz}\big) = \sum_{i=0}^{2} \mathbf{P}(X = 2i) = \frac{\binom{5}{0}\cdot\binom{8}{7}}{\binom{13}{7}} + \frac{\binom{5}{2}\cdot\binom{8}{5}}{\binom{13}{7}} + \frac{\binom{5}{4}\cdot\binom{8}{3}}{\binom{13}{7}} = \frac{212}{429} = 0.49417$$

$$\mathbf{E}X = \sum_{i=0}^{5} i \cdot \frac{\binom{5}{i}\cdot\binom{8}{7-i}}{\binom{13}{7}} = \frac{35}{13} = 2.6923.$$

3. Három személy feldob egy-egy dobókockát, aki a legnagyobbat dobja, az nyer. Ha nincs döntéshelyzet a dobás után, megismétlik a dobást. Jelölje a játék hosszát X. Adja meg X eloszlását, várható értékét és szórását.

Megoldás: A játék akkor áll meg, azaz van döntési helyzet, ha a maximális érték egyetlen kockán mutatkozik. Ez áll fenn, ha mindegyik érték különbözik ($6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ eset), vagy ha két dobás ugyan egyenlő, de a harmadik érték ennél nagyobb. Ha a megegyező értékek 1-esek, akkor 15 ilyen eset lehet, 2-nél 12, 3-nál, 9, 4-nél 6, 5-nél 3 lehetőség van, összesen 45. Tehát annak valószínűsége, hogy egy dobásnál kiderül, ki a nyertes: $p = \frac{165}{216} = 0.76389.$ X tehát egy geometriai eloszlású változó, p sikervalószínűséggel:

$R_X = \{1,2,\ldots,n,\ldots\}.\ \mathbf{P}(X = i) = (1-p)^{i-1} \cdot p.$

$\mathbf{E}X = \frac{216}{165} = 1.3091, \boldsymbol{\sigma}X = \frac{\sqrt{1-\frac{165}{216}}}{\frac{165}{216}} = 0.6361$

4. Legyen $X \in E(\frac{1}{2})$ és $Y \in E(\frac{1}{3})$ függetlenek. Mekkora valószínűséggel vesz fel legalább kétszer akkora értéket X mint Y?

Megoldás: Miután a változók függetlenek, $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{6}e^{-\frac{x}{2}-\frac{y}{3}}, x,y > 0.$

Kiszámolandó a $\mathbf{P}(2Y < X) = \iint\limits_{y<\frac{x}{2}} f_{X,Y}(x,y)dxdy$ mennyiség.

$$\mathbf{P}(2Y < X) = \iint\limits_{y<\frac{x}{2}} f_{X,Y}(x,y)dxdy = \int_0^\infty \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{1}{6}e^{-\frac{x}{2}-\frac{y}{3}}dydx = \frac{1}{6}\int_0^\infty \left[-3e^{-\frac{x}{2}-\frac{y}{3}}\right]_0^{\frac{x}{2}} dx =$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^\infty 3e^{-\frac{x}{2}} - 3e^{\frac{-4x}{6}}dx = \frac{1}{6}\left[-6e^{-\frac{x}{2}} + \frac{9}{2}e^{\frac{-4x}{6}}\right]_0^\infty = \frac{1}{6}\cdot\left(6 - \frac{9}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

A keresett valószínűség tehát $\frac{1}{4}$.

5. A menzán egy adag leves átlagosan 3 dl, 0,2 dl szórással. Mennyi a valószínűsége, hogy 30 liter levesből legalább 102 adagot mérnek ki?

Megoldás: A levesadagok mennyiségének összegéről van szó. Jelölje X_i az i-edik levesadag mennyiségét. A kérdés tehát:

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{102} X_i \leq 300\right)$$

Mivel kézenfekvő feltételezés, hogy a levesadagok mennyisége a várható érték körül meglehetősen szimmetrikusan oszlik el, a 102 már elég sok ahhoz, hogy a centrális határeloszlástételt alkalmazzuk.

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{102} X_i \leq 300\right) = \mathbf{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{102} X_i - 102\cdot 3}{\sqrt{102}\cdot 0.2} \leq \frac{300 - 102\cdot 3}{\sqrt{102}\cdot 0.2}\right) =$$

$$= \Phi(-2.9704) = 1 - \Phi(2.9704) \approx 0$$

Azaz, gyakorlatilag szinte sosem fordul elő, hogy 102 adag is kiteljen.

6. **IMSC** Bizonyítsuk be, hogy ha a véges szórású X diszkrét valószínűségi változó minden értéke az [a,b] intervallumba esik, akkor $\boldsymbol{\sigma}X \leq \frac{b-a}{2}$.

Megoldás: Felhasználjuk a Steiner-tételt.

$$\boldsymbol{\sigma}^2 X \leq \mathbf{E}(X-x)^2, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Viszont

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X-x)^2 &\leq (a-x)^2\mathbf{P}(X<x) + (b-x)^2\mathbf{P}(X \geq x) = \\ &= (a-x)^2 + \left[(b-x)^2 - (a-x)^2\right]\mathbf{P}(X \geq x) = \\ &= (a-x)^2 + (b-a)(a+b-2x)\mathbf{P}(X \geq x)\end{aligned}$$

Ennek az egyenőtlenségnek az igazolása folytonos esetben:

$$\mathbf{E}(X-x)^2 = \int_a^b (t-x)^2 \bullet f_X(t)dt = \int_a^x (t-x)^2 \bullet f_X(t)dt + \int_x^b (t-x)^2 \bullet f_X(t)dt \leq$$

$$\leq (a-x)^2 \int_a^x f_X(t)dt + (b-x)^2 \int_x^b f_X(t)dt =$$

$$= (a-x)^2\mathbf{P}(X<x) + (b-x)^2\mathbf{P}(X \geq x)$$

A bizonyítás diszkrét esetben:

$$\mathbf{E}(X-x)^2 = \sum_{\forall x_i}(x_i-x)^2\mathbf{P}(X=x_i) = \sum_{\forall x_i<x}(x_i-x)^2\mathbf{P}(X=x_i) + \sum_{\forall x_i \geq x}(x_i-x)^2\mathbf{P}(X=x_i) \leq$$

$$\leq (a-x)^2 \sum_{\forall x_i<x}\mathbf{P}(X=x_i) + (b-x)^2 \sum_{\forall x_i \geq x}\mathbf{P}(X=x_i) =$$

$$= (a-x)^2\mathbf{P}(X<x) + (b-x)^2\mathbf{P}(X \geq x)$$

Tehát

$$\mathbf{E}(X-x)^2 \leq (a-x)^2 + (b-a)(a+b-2x)\mathbf{P}(X \geq x)$$

Ebbe behelyettesítve $x = \frac{a+b}{2}$-t

$$\boldsymbol{\sigma}^2 X \leq \mathbf{E}(X-x)^2 \leq \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

ami már igazolja az állítást. Az egyenlőtlenség éles, hiszen az az X diszkrét változó, ami az a-t is és b-t is $\frac{1}{2}$ valószínűséggel vesz fel éppen $\frac{b-a}{2}$ szórású.

B csoport megoldása

1. Egy szerkezet élettartama exponenciális eloszlású valószínűségi változónak tekinthető 2000 óra várható értékkel. A szerkezet használói a szerkezetet átlagosan napi 10 órát üzemeltetik. Milyen hosszú garanciaidőt adjon a gyártó cég, ha az eladott szerkezeteknek legfeljebb 5%-át akarja garanciálisan cserélni?
Megoldás: Jelölje X egy ilyen szerkezet élettartamát. Ha a garanciaidő N óra, akkor

$$\mathbf{P}(X < N) = F_X(N) = 1 - e^{-\frac{N}{2000}} \leq 0.05$$

Ebből $0.95 \leq e^{-\frac{N}{2000}}$ azaz $N \leq 2000 \cdot \ln\frac{100}{95} = 102.59$ ⇒Kb. 10 napos garancia indokolt.

2. Egy dobozban 4 piros és 6 fehér golyó van. Kihúzunk a dobozból 5 golyót. Mennyi a valószínűsége, hogy páros számú piros lesz a kihúzottak között? Várhatóan hány pirosat húzunk?
Megoldás: Jelölje a X a piros színű golyók számát. $R_X = \{0,1,2,3,4\}, \mathbf{P}(X = i) = \frac{\binom{4}{i}\cdot\binom{6}{5-i}}{\binom{10}{5}}$

$$\mathbf{P}\left(\text{páros számú piros lesz}\right) = \sum_{i=0}^{2}\mathbf{P}(X = 2i) = \frac{\binom{4}{0}\cdot\binom{6}{5}}{\binom{10}{5}} + \frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{6}{3}}{\binom{10}{5}} + \frac{\binom{4}{4}\cdot\binom{6}{1}}{\binom{10}{5}} = \frac{11}{21} = 0.52381$$

$$\mathbf{E}X = \sum_{i=0}^{4} i\cdot\frac{\binom{4}{i}\cdot\binom{6}{5-i}}{\binom{10}{5}} = 2$$

3. Négy személy feldob egy-egy dobókockát, aki a legkisebbet dobja, az nyer. Ha nincs döntéshelyzet a dobás után, megismétlik a dobást. Jelölje a játék hosszát X. Adja meg X eloszlását, várható értékét és szórását.
Megoldás: A játék akkor áll meg, azaz van döntési helyzet, ha a minimális érték egyetlen kockán mutatkozik. Ennek az eseménynek a valószínűsége 4 kocka esetén: $p = 4\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5^3+4^3+3^3+2^3+1^3}{6^3}\right) = \frac{25}{36}$. X tehát egy geometriai eloszlású változó, p sikervalószínűséggel:
$R_X = \{1,2,\ldots,n,\ldots\}$. $\mathbf{P}(X = i) = (1-p)^{i-1}\cdot p$.
$\mathbf{E}X = \frac{36}{25} = 1.44, \sigma X = \frac{\sqrt{1-\frac{25}{36}}}{\frac{25}{36}} = 0.79599$

4. Legyen $X \in E(1)$ és $Y \in E(2)$ függetlenek. Mekkora valószínűséggel vesz fel legalább kétszer akkora értéket X mint Y?
Megoldás: Miután a változók függetlenek, $f_{X,Y}(x,y) = 2e^{-x-2y}, x,y > 0$.
Kiszámolandó a $\mathbf{P}(2Y < X) = \iint\limits_{y<\frac{x}{2}} f_{X,Y}(x,y)dxdy$ mennyiség.

$$\mathbf{P}(2Y < X) = \iint\limits_{y<\frac{x}{2}} f_{X,Y}(x,y)dxdy = \int_0^\infty\int_0^{\frac{x}{2}} 2e^{-x-2y}dydx = \int_0^\infty[-e^{-x-2y}]_0^{\frac{x}{2}}dx =$$

$$= \int_0^\infty e^{-x} - e^{-2x}dx = [-e^{-x} + \tfrac{1}{2}e^{-2x}]_0^\infty = \frac{1}{2}$$

A keresett valószínűség tehát $\frac{1}{2}$.

5. A menzán egy adag leves átlagosan 2 dl, 0,1 dl szórással. Mennyi a valószínűsége, hogy 50 liter levesből legalább 255 adagot mérnek ki?
Megoldás: A levesadagok mennyiségének összegéről van szó. Jelölje X_i az i-edik levesadag mennyiségét. A kérdés tehát:

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{255} X_i \leq 500\right)$$

Mivel kézenfekvő feltételezés, hogy a levesadagok mennyisége a várható érték körül meglehetősen szimmetrikusan oszlik el, a 103 már elég sok ahhoz, hogy a centrális határeloszlástételt alkalmazzuk.

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{255} X_i \leq 500\right) = \mathbf{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{255} X_i - 255\cdot 2}{\sqrt{255}\cdot 0.1} \leq \frac{500 - 255\cdot 2}{\sqrt{255}\cdot 0.1}\right) =$$

$$= \Phi(-6.2622) = 1 - \Phi(6.2622) \approx 0$$

Azaz gyakorlatilag nem lehet kimerni 255 adagot.

6. **IMSC** Bizonyítsuk be, hogy ha a véges szórású X folytonos valószínűségi változó minden értéke az [a,b]

intervallumba esik, akkor $\boldsymbol{\sigma}X \le \frac{b-a}{2}$.
Megoldás: Felhasználjuk a Steiner-tételt.

$$\boldsymbol{\sigma}^2 X \le \mathbf{E}(X-x)^2, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Viszont

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X-x)^2 &\le (a-x)^2\mathbf{P}(X<x) + (b-x)^2\mathbf{P}(X\ge x) = \\ &= (a-x)^2 + \left[(b-x)^2 - (a-x)^2\right]\mathbf{P}(X\ge x) = \\ &= (a-x)^2 + (b-a)(a+b-2x)\mathbf{P}(X\ge x)\end{aligned}$$

Ennek az egyenőtlenségnek az igazolása folytonos esetben:

$$\mathbf{E}(X-x)^2 = \int_a^b (t-x)^2 \cdot f_X(t)dt = \int_a^x (t-x)^2 \cdot f_X(t)dt + \int_x^b (t-x)^2 \cdot f_X(t)dt \le$$

$$\le (a-x)^2 \int_a^x f_X(t)dt + (b-x)^2 \int_x^b f_X(t)dt =$$

$$= (a-x)^2\mathbf{P}(X<x) + (b-x)^2\mathbf{P}(X\ge x)$$

A bizonyítás diszkrét esetben:

$$\mathbf{E}(X-x)^2 = \sum_{\forall x_i}(x_i-x)^2\mathbf{P}(X=x_i) = \sum_{\forall x_i<x}(x_i-x)^2\mathbf{P}(X=x_i) + \sum_{\forall x_i\ge x}(x_i-x)^2\mathbf{P}(X=x_i) \le$$

$$\le (a-x)^2 \sum_{\forall x_i<x}\mathbf{P}(X=x_i) + (b-x)^2 \sum_{\forall x_i\ge x}\mathbf{P}(X=x_i) =$$

$$= (a-x)^2\mathbf{P}(X<x) + (b-x)^2\mathbf{P}(X\ge x)$$

Tehát

$$\mathbf{E}(X-x)^2 \le (a-x)^2 + (b-a)(a+b-2x)\mathbf{P}(X\ge x)$$

Ebbe behelyettesítve $x = \frac{a+b}{2}$-t

$$\boldsymbol{\sigma}^2 X \le \mathbf{E}(X-x)^2 \le \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

ami már igazolja az állítást. Az egyenlőtlenség éles, hiszen az az X diszkrét változó, ami az a-t is és b-t is $\frac{1}{2}$ valószínűséggel vesz fel éppen $\frac{b-a}{2}$ szórású.