Algoritmuselmélet vizsgazárthelyi

A rendelkezésre álló munkaidő 100 perc. 2011. december 22.
Kérjük, minden résztvevő **nevét, NEPTUN kódját**, a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel. Ezen kívül a legfelső lapra írja rá **gyakorlatvezetője nevét** is (akihez a NEPTUN szerint jár).
Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-31 pont: 1, 32-43 pont: 2, 44-55 pont: 3, 56-67 pont: 4, 68-80 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy kiszámításakor a (legalább elégséges) zh pontszámát vesszük figyelembe.
Íróeszeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés.
Az eredményeket péntek estéig igyekszünk közzétenni a honlapon.
Megtekintés, szóbeli: 2012. január 3. kedd, 14:00-15:00, IB2.17.1.

1. Írd le a legrövidebb utak keresésére szolgáló Dijkstra-algoritmust. Mi az algoritmus alkalmazásának feltétele? (Az algoritmus helyességét nem kell bizonyítani.) Mennyi az algoritmus lépésszáma, ha a gráf a mátrixával van megadva és miért?

2. Definiáld a topologikus rendezés fogalmát. Milyen gráfoknak van topologikus rendezése? Ismertesd a topologikus rendezés megtalálására tanult algoritmust! (Indoklás nem szükséges.)

3. Definiáld a P és az NP problémaosztályt; mi az egymáshoz való viszonyuk? Válaszod indokold is meg.

4. Adott egy n elemet tartalmazó és egy k elemet tartalmazó 2-3 fa. A két fában tárolt összes elemből $O(n+k)$ lépésben készíts egy rendezett tömböt.

5. Adott egy n pontú, e élű súlyozott, irányított gráf, a súlyok lehetnek negatívak is, de nincs negatív összsúlyú kör. Adott még a ponthalmaz két diszjunkt részhalmaza S és T. Adjunk $O(ne)$ lépésszámú algoritmust, ami meghatározza a legrövidebb olyan út összsúlyát, aminek kezdőpontja S-ben, végpontja pedig T-ben van!

6. Adott a síkon n város: $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Két város távolsága, $s_{i,j}$, a városok közötti euklideszi távolság. Két autó indul v_1-ből, minden városba el kell juttatniuk egy-egy ZH feladatsort (mindenhova egyformát, mindkét autóban van n példány). Mindkét autó által meglátogatott városok indexei csak növekvő sorozatot alkothatnak. Adjunk $O(n^3)$ futásidejű algoritmust, ami meghatározza a két autó által megtett út összegének minimumát!

7. A kezdetben üres $M = 8$ méretű hashtáblába a $h(x) = 5x \pmod M$ hash-függvény és a $h'(x) = (x \pmod 3) + 1$ másodlagos hash-függvény segítségével az adott sorrendben rakd be a $3, 2, 4, 11, 5, 1$ elemeket. Ábrázold az egyes beszúrások menetét is!

8. Igazold, hogy a következő eldöntési probléma P-ben van, vagy azt, hogy NP-teljes:

   Input: G gráf, melyre teljesül, hogy $e(G) \leq 3v(G)$

   Kérdés: Igaz-e, hogy G kiszínezhető 3 színnel?

   ($e(G)$ a gráf éleinek, $v(G)$ a gráf pontjainak számát jelöli.)