

Bonyolultságelmélet

NP-teljes (emlékeztető) (matematikailag nem feltétlenül korrekt):

3-SZÍN	G : G egy irányítatlan egyszerű gráf, aminek csúcsai kiszínezhetők 3 színnel
MAXFTLEN	(G, k) : G egy gráf, amiben van k darab független pont
MAXKLIKK	(G, k) : G egy gráf, amiben van k pontú teljes részgráf
H	(G) : G irányítatlan gráf, van benne Hamilton-kör
Hút	(G) : G irányítatlan gráf, van benne Hamilton-út
stHút	(G, s, t) : G irányítatlan gráf, van benne Hamilton-út s -ből t -be
3DH	$(A, B, C; F_1, \dots, F_n)$: létezik olyan F -sorozat, hogy $A \cup B \cup C$ minden elemét pontosan egyszer fedik le
X3C	$(A; F_1, F_2, \dots, F_n)$: A lefedhető pontosan egyszeresen egyes F_i halmazokat használva.
PARTÍCIÓ	$(s_1, s_2, \dots, s_n)$: két részre bontható, hogy a két rész összege egyenlő
RH	$(s_1, s_2, \dots, s_n; b)$: van részhalmaz, aminek az összege b
HÁTIZSÁK	$(s_1, \dots, s_n; v_1, \dots, v_n; b, k)$: van olyan indexhalmaz, hogy $\sum s \leq b$ és $\sum v \geq k$
RÉSZGRÁFIZO	(G_1, G_2) : amelyre $\exists G' \leq G_2$, és $G' \simeq G_1$
EP	igaz az $Ax \leq b$ egyenlőtlenségrendszer, x egész vektor, mennyi cx skalárszorzat maximális értéke

- Mutassuk meg, hogy alábbi L probléma NP-teljes úgy, hogy visszavezetjük rá a MAXFTLEN ismert NP-teljes nyelvet:
 $L = \{(G, a, b) : a, b > 0 \text{ egészek, a } G \text{ gráfnak van } K_{a,b} \text{ teljes páros gráffal izomorf feszített részgráf}\}.$
- Bizonyítsuk be, hogy az alábbi probléma NP-teljes:
 $L = \{(a_1, \dots, a_n) : a_i \text{ számok egészek és a számok három részre oszthatók úgy, hogy mindhárom rész összege ugyanannyi legyen}\}.$
- Mutassuk meg, hogy az alábbi L probléma NP-teljes:
 $L = \{G(V, E) : G \text{ irányítatlan gráf, } |E| \leq 2|V|, \text{ a } G \text{ gráf színezhető 3 színnel}\}.$
- Mutassuk meg, hogy az alábbi nyelv P-ben van, vagy azt, hogy NP-teljes:
 $L = \{(A, F_1, \dots, F_n; r) : \forall i\text{-re } F_i \subseteq A, |F_i| = 3, \text{ és az } F_i \text{ halmazok között van } r \text{ darab páronként diszjunkt}\}.$
- Tudjuk, hogy a síkgráfokból álló nyelv P-ben van. Legyen a SÍK-MAXKLIKK nyelv a következő:
 $\{(G, k) | G \text{ egy síkgráf, amiben van } k \text{ pontú klikk}\}.$
Mutassuk meg, hogy ez a probléma NP-teljes, vagy mutassuk meg, hogy P-beli.
- Mondjunk példát olyan gráfra, amely nem színezhető 3 színnel, de a klikkszám legfeljebb 3.
- Mutassuk meg, hogy az alábbi nyelv P-ben van, vagy azt, hogy NP-teljes:
 $L = \{(A, F_1, \dots, F_n; r) : \forall i\text{-re } F_i \subseteq A, |F_i| = 3, \text{ és az } F_i \text{ halmazok között van } r \text{ darab páronként diszjunkt}\}.$
- A G irányítatlan gráf minden x pontjához tartozik egy $s(x)$ súly. Célunk, hogy olyan feszítőfát találjunk a gráfban, amiben a levelekhez tartozó súlyok összege minimális. Fogalmazzuk meg a feladathoz tartozó problémát és lássuk be róla, hogy P-ben van, vagy azt, hogy NP-teljes.
- Egy hivatal új épületbe fog költözni. Az épület minden emeletén ugyanakkora terület használható fel irodák kialakítására. Minden részleg megmondta, hogy összesen mekkora irodaterületre tart igényt. Azt akarjuk eldönteni, hogy meg lehet-e oldani a költözést úgy, hogy egyetlen részleg se legyen szétvágtva több részre, azaz teljes egészében egy emeleten legyen (de egy emeletre kerülhet több részleg is). Igazolja, hogy a probléma P-ben van, vagy azt, hogy NP-teljes.
- Jelölje L_1 az irányítatlan összefüggő gráfokból álló nyelvet ("problémateret") és L_2 a Hamilton-kört tartalmazó gráfokból álló nyelvet. Lehetséges-e, hogy $L_1 \prec L_2$ illetve, hogy $L_2 \prec L_1$? Ha nem, miért nem? Ha igen, milyen feltétellel?
- Egy n emberből álló szervezetben b -féle bizottság működik. Bizottsági ülések időpontját akarjuk kitűzni. Két különböző bizottság ülése akkor lehet azonos napon, ha nincs olyan ember, aki mindkét bizottság tagja. Legyen adott egy k pozitív egész szám és minden bizottsághoz a tagok névsora (tegyük fel, hogy a név egyértelműen azonosít egy-egy személyt). Azt szeretnénk eldönteni, hogy a b bizottsági ülés kitűzhető-e összesen legfeljebb k különböző napra. Mutassuk meg, hogy P-beli, vagy azt, hogy NP-teljes.

12. Igazoljuk, hogy ha $coNP \neq NP$, akkor $MAXKLICK \notin P$.
13. Tegyük fel, hogy $P \neq NP$. Az alábbi feltételek közül melyikből következik és melyikből nem következik, hogy az X eldöntési probléma **nem** P-beli?
- (a) Egy NP-teljes Y problémára X Karp-redukálható.
 - (b) Egy NP-teljes Y probléma X -re Karp-redukálható.
 - (c) Az X probléma NP-beli.

Az alábbi problémáknak határozzuk meg a bonyolultságát!

14. **Input:** G gráf és $S \subseteq V(G)$
Kérdés: Létezik-e olyan G -beli kör, ami S minden pontján átmegy?
15. **Input:** G gráf és $S \subseteq V(G)$
Kérdés: Létezik-e olyan G -beli kör, melynek minden pontja S -beli?
16. **Input:** Összefüggő, $n = 5k$ pontú gráf
Kérdés: Van-e G -ben pontosan k hosszú kör?
moHamilton
17. **Input:** G gráf és $e \in E(G)$
Kérdés: Van-e G -ben olyan kör, mely e -t tartalmazza?
18. **Input:** G gráf
Kérdés: Kiszínezhető-e G száz színnel?
19. **Input:** G gráf és $x, y, z \in V(G)$
Kérdés: Kiszínezhetőek-e G pontjai három színnel jól úgy, hogy x, y és z különböző színű legyen?
20. **Input:** G gráf
Kérdés: Van-e G -ben 1000 független pont?
21. **Input:** G gráf
Kérdés: Van-e G -ben legalább 1000 hosszú kör?
22. **Input:** G gráf
Kérdés: Igaz-e, hogy G bármely két pontján át vezet kör?