

Minimális feszítőfák, bonyolultságelmélet

1. Legyen adva egy (egyszerű, irányítatlan, összefüggő) n pontú G gráf éllistával, az élek súlyozásával együtt. Tegyük fel, hogy a G -ből a v_1 csúcs, valamint a v_1 -re illeszkedő élek elhagyásával keletkező G' gráf még mindig összefüggő, és adott G' egy minimális költségű feszítőfája. Adjunk minél hatékonyabb algoritmust a G gráf egy minimális költségű feszítőfájának az elkészítésére! (Teljes értékű megoldás: $O(n \log n)$ idejű algoritmus.)
2. Éllistával adott egy összefüggő, egyszerű, irányítatlan G gráf csupa különböző élsúlyokkal. Jelöljük n -nel a csúcsok, e -vel pedig az élek számát. Mutassunk egy lineáris (azaz $O(e)$) uniform költségű algoritmust, ami a G gráf egy minimális feszítőfájának $\lfloor 2n/3 \rfloor$ élet előállítja! (Egy olyan $\lfloor 2n/3 \rfloor$ elemszámú élhalmazt keresünk, ami biztosan része egy minimális költségű feszítőfának.)
3. Legyen adott egy $n \times n$ pixelből álló fekete-fehér kép. Szeretnénk a képen a bal felső saroktól a jobb alsó sarokig egy jobbra-lefele haladó határvonalat húzni úgy, hogy a vonaltól jobbra-felfele eső fekete, valamint a vonaltól balra-lefele eső fehér pixelek számának az összege a lehető legkisebb legyen. Oldjuk meg ezt a feladatot $O(n^2)$ időben!
4. Mi az UNIÓ-HOLVAN adatszerkezet lényege? Milyen lépésszámokat garantálhatunk fás implementációval?
5. A $G(V, E)$ összefüggő, irányított gráf minden éle az $1, 2, \dots, k$ számok valamelyikével van súlyozva. Egy út értéke legyen az úton található élek súlyainak *maximuma*. Határozza meg, hogy ha adott két csúcs $x, y \in V$, akkor mennyi a lehető legkisebb értékű x -ből y -ba vezető út értéke. Ha G éllistával adott és e éle van, akkor a lépésszám legyen $O(e \log k)$.
6. Irányítatlan gráf tárolására adjunk meg egy adatszerkezetet az alábbi műveletekkel:

- ÚJCSÚCS(v): a gráfhoz hozzáad egy új csúcsot
- ÚJÉL(u, v): a már létező u és v csúcsok közé felvesz egy élet
- VANÚT(u, v): igen értéket ad vissza, ha vezet az u és v csúcsok között út, egyébként pedig nem értéket

Ha a tárolt gráfnak n csúcsa van, akkor mindhárom művelet lépésszáma legyen $O(\log n)$. Más műveletre nem kell számítani.

7. Hogyan definiáljuk a P , NP és a $coNP$ osztályokat?

NP-teljes (emlékeztető) (matematikailag nem feltétlenül korrekt):

8. Mutassuk meg az alábbi eldöntési problémákról, hogy NP-beliek. Melyekről tudjuk belátni, hogy P-ben vannak? Melyekről látjuk, hogy coNP-beliek?
 - (a) **Input:** (G, k) ahol G páros gráf, k pozitív egész
Kérdés: G -ben van-e k élből álló párosítás?
 - (b) **Input:** G irányítatlan gráf
Kérdés: G -ben van-e Euler kör?
 - (c) **Input:** (G, k) ahol G irányítatlan gráf, k pozitív egész
Kérdés: G -ben van-e k darab független pont?
 - (d) **Input:** $(s_1, \dots, s_n, b)$ pozitív egészek, ahol $1 \leq i \leq n$, b pozitív egész
Kérdés: Ki lehet-e választani néhány s_i -t, melyek összege b ?

9. Mutassuk meg, hogy alábbi L probléma NP-teljes úgy, hogy visszavezetjük rá a MAXFTLEN ismerten NP-teljes nyelvet:
 $L = \{(G, a, b) : a, b > 0 \text{ egészek, a } G \text{ gráfnak van } K_{a,b} \text{ teljes páros gráffal izomorf feszített részgráf}\}.$

10. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi probléma NP-teljes:
 $L = \{(a_1, \dots, a_n) : a_i \text{ számok egészek és a számok három részre oszthatók úgy, hogy mindhárom rész összege ugyanannyi legyen}\}.$
11. Mutassuk meg, hogy az alábbi L probléma NP-teljes:
 $L = \{G(V, E) : G \text{ irányítatlan gráf, } |E| \leq 2|V|, \text{ a } G \text{ gráf színezhető 3 színnel}\}.$
12. Mutassuk meg, hogy az alábbi nyelv P-ben van, vagy azt, hogy NP-teljes:
 $L = \{(A, F_1, \dots, F_n; r) : \forall i\text{-re } F_i \subseteq A, |F_i| = 3, \text{ és az } F_i \text{ halmazok között van } r \text{ darab páronként diszjunkt}\}.$
13. Tudjuk, hogy a síkgráfokból álló nyelv P-ben van. Legyen a SÍK-MAXKLIKK nyelv a következő:
 $\{(G, k) | G \text{ egy síkgráf, amiben van } k \text{ pontú klikk}\}.$
Mutassuk meg, hogy ez a probléma NP-teljes, vagy mutassuk meg, hogy P-beli.