

## Hash, DFS

1. A hash-függvény legyen  $f(K) = K$ , a táblaméret  $M = 7$ , és  $1 \leq K \leq 20$ . Helyezzük el a táblában a 3, 4, 7, 11, 14, 17, 20 kulcsokat ebben a sorrendben
  - (a) lineáris
  - (b) kvadratikus maradék
 próbálást használva az ütközések feloldására.
2. Egy  $M$  méretű hash-táblába  $n < M$  elemet raktunk be nyitott címzéssel, kvadratikus próbával. Ennek során  $t_1$  ütközés történt, azaz ennyiszer kellett tovább próbálkoznunk – egy elem beszúrása során több ütközés is lehetett. Ugyanezt az  $n$  elemet ugyanabban a sorrendben beszúrtuk egy  $M^2$  méretű hash-táblába is, de most lineáris próbával,  $M \cdot h(x) + 1$  hash-függvénnyel, ekkor  $t_2$  ütközés történt. Igazoljuk, hogy  $t_2 \leq t_1$ ! (ZH 2010. tavasz)
3. A  $T[0 : M]$  táblában  $2n$  elemet helyeztünk el az első  $3n$  helyen ( $3n < M$ ) egy ismeretlen hash-függvény segítségével. A táblában minden  $3i$  indexű hely üresen maradt ( $0 \leq i < n$ ). Legfeljebb hány ütközés lehetett, ha az ütközések feloldására
  - (a) lineáris próbálást
  - (b) kvadratikus maradék próbálást használtunk?
4. Nyitott címzéssel hasheltünk egy 11 elemű táblába a  $h(k) = k \pmod{11}$  hash-függvény és kvadratikus maradék próba segítségével.  
A következő kulcsok érkeztek (a megadott sorrendben): 6, 5, 7, 17, 16, 3, 2, 14. Adjuk meg a tábla végső állapotát!
5. Egy  $m$  méretű hash-táblában már van néhány elem. Adjon  $O(m)$  lépésszámú algoritmust, amely meghatározza, hogy egy újabb elem lineáris próbával történő beszúrásakor maximum hány ütközés történhet.
6. A  $b_0 \dots b_n$  alakú  $n + 1$  hosszú bitsorozatot akarjuk tárolni. Tudjuk, hogy a  $b_0$  paritásbit, ami a sorozatban az egyesek számát párosra egészíti ki. Ha nyitott címzésű hash-elést használunk  $h(x) \equiv x \pmod{M}$  hash-függvénnyel és lineáris próbával, akkor  $M = 2^n$  vagy  $M = 2^n + 1$  méretű hash-tábla esetén lesz kevesebb ütközés?
7. A kezdetben üres  $M$  méretű hash-táblába sorban beraktuk a  $k_1, k_2, \dots, k_n$  kulcsokat a  $h(x) \equiv x \pmod{M}$  hash-függvénnyel, lineáris próbával. Jelölje  $t_1$  a keletkezett táblában az egymás melletti foglalt mezők maximális számát. (Ciklikusan értve, azaz  $t_1$  a következő beszúráskori leghosszabb próbасorozat hossza.) Amikor ugyanezt a  $k_1, k_2, \dots, k_n$  sorozatot ugyanabban a sorrendben egy üres  $2M$  méretű táblába rakjuk be a  $h(x) \equiv x \pmod{2M}$  hash-függvénnyel, lineáris próbával, akkor a kapott táblában legyen  $t_2$  az egymás melletti foglalt mezők maximális száma.
  - (a) Igazolja, hogy  $t_2 \leq t_1$
  - (b) Igaz-e, hogy  $t_1 \leq 2t_2$ ?
8. Egy 10 méretű hash-táblába kettős hash-elést használva helyezzük el a következő elemeket: 12, 5, 20, 11, 25, 2. A használt hash-függvény legyen  $h(x) = 3x \pmod{10}$ , a második hash-függvény pedig  $h'(x) = (x \bmod 9) + 1$ . (PPZH 2010. tavasz) Mi a baj a  $h'(x)$  értékeivel?
9. A  $T[0 : M - 1]$  táblában rekordokat tárolunk nyitott címzésű hashelt szervezéssel. Az ütközések feloldására lineáris próbálást alkalmazunk. Tehát ha a  $h(K)$  sorszámú cella foglalt, akkor a  $K$  kulcsú rekordot a  $h(K) - 1, h(K) - 2, \dots$  sorszámú cellák közül az első üresbe tesszük. Tegyük fel, hogy a tábla használata során egy hibás törlés történt: egy cellából kitöröltünk egy rekordot a törlés-bit beállítása nélkül.
  - (a) Igaz-e, hogy a hibás törlés helye mindig megtalálható?
  - (b) Adjunk hatékony (lineáris időigényű) algoritmust a tábla megjavítására. (Módosítsuk úgy a táblát, hogy megszűnjenek a hibás törlés negatív következményei.)
10. Hogyan működik a mélységi keresés (DFS)? Milyen éleket különböztet meg egy bejárás, van-e minden esetben az összes típusból? Lehet-e egy él más típusú ugyanabban a gráfban különböző/ugyanazon bejárásban? Milyen számokkal jellemezhetünk egy-egy csúcsot a bejárás szemponjából?

11. Hogyan viszonyulhat a fenti élek két végpontjának mélységi és befejezési száma egymáshoz egy irányított gráfban? És hogyan, ha nincs él?
12. A 6 pontú  $G$  gráf csúcsait jelölje  $x, y, z, u, v, w$ . A gráf egy mélységi bejárásánál a mélységi, ill. a befejezési számok a következők:  $x$ : 1,6;  $y$ : 2,4;  $z$ : 6,5;  $u$ : 3,3;  $v$ : 4,1;  $w$ : 5,2. Adjuk meg a bejáráshoz tartozó mélységi feszítőfa éleit. Rekonstruálható-e  $G$  az előző számok ismeretében?
13. Éllistával adott a súlyozott élű  $G = (V, E)$  gráf. Tegyük fel, hogy az élek súlyai az 1,2,3 számok közül valók. Javasoljunk  $O(n + e)$  uniform költségű algoritmust az  $s \in V$  pontból az összes további  $v \in V$  pontokba vivő legrövidebb utak hosszának a meghatározására. (Itt  $n$  a  $G$  gráf csúcsainak,  $e$  pedig az éleinek a száma.)
14. Legyen  $G$  egy irányítatlan összefüggő gráf. Igaz-e, hogy
  - (a)  $G$  minden  $f$  éléhez van  $G$ -nek olyan mélységi bejárása, amelyben  $f$  egy faél?
  - (b)  $G$  minden  $f$  éléhez van  $G$ -nek olyan szélességi bejárása, amelyben  $f$  egy faél?
  - (c)  $G$  minden  $F$  feszítőfájához van  $G$ -nek olyan mélységi bejárása, amelyben  $F$  minden éle faél?
  - (d)  $G$  minden  $F$  feszítőfájához van  $G$ -nek olyan szélességi bejárása, amelyben  $F$  minden éle faél?
15. Tekintsük az olyan  $G$  irányított gráfokat, amelyekben ha eltekintünk az élek irányításától, akkor a kapott irányítatlan  $G'$  gráf összefüggő. A  $G$  gráf egy mélységi bejárásánál maximálisan hány olyan csúcs lehet, amelyre a mélységi és a befejezési szám megegyezik?