Kazi Sándor
KAZI(AT)CS.BME.HU

O, Ω, Θ

1	$(\log n)^k$, ahol $k > 0$	n	$n \cdot \log n$	n^k, ahol $k \geq 2$	c^n, ahol $c > 1$	$n!$	n^n

0. Mi a tagadása az alábbi állításoknak? Igazak ezek az állítások?
   - Minden kedden van algel gyakorlat.
   - Minden olyan hallgató, aki jár algel gyakorlatra, átmegy a vizsgán.
   - Minden olyan 17 lábú zsiráf, aki jár algel gyakorlatra, az átmegy a vizsgán.
   - Nem értek hozzá.

1. Az $f(n) = O(n)$ jelölés egyenletnek tekinthető-e? Mi fejezi ki a relációt a kifejezésben és mik között áll fenn?

2. Jelöljük $T(n)$-nel egy algoritmus legnagyobb lehetséges lépésszámát az n méretű inputokon. Tudjuk, hogy $T(n) \leq 10$, ha $n \leq 5$ és $T(n) \leq T(n-1) + n/3$, ha $n > 5$. Ekkor mit tudunk mondani $T(n) = O(n)$, $T(n) = O(n^2)$ és $T(n) = O(n^3)$ egyenlőségek helyességéről?

3. Az alábbi függvények esetén mely párokra teljesül, hogy $f_i(n) = O(f_j(n))$? Miért?
   $f_1(n) = 11n^2 \quad f_2(n) = 8n^2 \cdot \log n \quad f_3(n) = n^2 + 123456$

4. Igaz-e, hogy $log_2 f(n) = \Theta(log_{100}(f(n))$, feltéve, hogy $f(n) > 0$?

5. Adjunk O becslést a következő függvényekre:
   (a) $(n^2 + 8)(n + 1)$
   (b) $(n \log_2 n + n^2)(n^3 + 2)$
   (c) $(n^3 + n^2 \log_2 n)(\log_2 n + 1) + (17 \log_2 n + 19)(n^3 + 2)$
   (d) $(n! + 2^n)(n^3 + \log_2(n^2 + 1))$
   (e) $(2^n + n^2)(n^3 + 3^n)$
   (f) $(n^n + n2^n + 5^n)(n! + 5^n)$

6. Ugyanarra a feladatra van két algoritmusunk: A és B. A maximális lépésszámot leíró függvények legyenek f_A és f_B. Tudjuk, hogy $f_A(n) = O(f_B(n) \cdot \log\ n)$. Következik-e ebből, hogy
   (a) A minden bemeneten gyorsabb, mint B.
   (b) A véges sok bemenet kivételével (konstans erejéig) gyorsabb, mint B.
   (c) A végtelen sok bemenet kivételével gyorsabb, mint B.
   (d) A megfelelően nagy bemenetekre (konstans erejéig) gyorsabb, mint B.

   És ha $f_A(n) \cdot \log n = O(f_B(n))$?

7. Tegyük fel, hogy van egy számítógépes programunk, ami egy k méretű feladaton a jelenlegi gépünkön 1 nap alatt fut le. Beszereztünk egy százszor gyorsabb számítógépet. Ugyanazon programmal mekkora feladatot lehet az új gépen egy nap alatt megoldani, ha a program lépésszáma n méretű feladat esetén n-nel ill. n^3-bel ill. 2^n-nel arányos?

8. Adott n chip, melyek képesek egymás tesztelésére a következő módon: ha összekapcsolunk két chipet, mindkét chip nyilatkozik a másikról, hogy hibásnak találta-e. Egy hibátlan chip korrektül felismeri, hogy a másik hibás -e, míg egy hibás chip akármilyen választ adhat. Tegyük fel, hogy a chipek több, mint a fele korrekt. Adjunk algoritmust, mely n-nél kevesebb fenti tesztet használva kikeres egy jó chipet.

9. Egy tanteremben fel van szerelve egy $n \times n$-es tábla, melyen n^2 villanykörte helyezkedik el. A tábla minden egyes sorához illetve oszlopához tartozik egy-egy nyomógomb, mellyel a megfelelő sorban (oszlopban) található n darab villanykörte állapotát egyszerre lehet átváltoztatni az ellenkezőjére. (Egy gombnyomásra az adott sorban illetve oszlopban égő körték elalszanak, az alvók pedig kigyulladnak.) A szünet kezdetekor az összes körte leoltott állapotban van. Szünetben a nebulók össze-vissza nyomogatják a gombokat. Hány kapcsolással tudja a tanár visszaállítani az eredeti állapotot? (A gombok egyállapotúak, azaz nem látszik rajtuk, hogy megnyomták-e őket vagy sem.)