

## Bonyolultságelmélet, közelítő algoritmusok

**Az alábbi problémáknak határozzuk meg a bonyolultságát!**

1. **Input:**  $G$  gráf és  $S \subseteq V(G)$   
**Kérdés:** Létezik-e olyan  $G$ -beli kör, ami  $S$  minden pontján átmegy?
2. **Input:**  $G$  gráf és  $S \subseteq V(G)$   
**Kérdés:** Létezik-e olyan  $G$ -beli kör, melynek minden pontja  $S$ -beli?
3. **Input:** Összefüggő,  $n = 5k$  pontú gráf  
**Kérdés:** Van-e  $G$ -ben pontosan  $k$  hosszú kör?
4. **Input:**  $G$  gráf és  $e \in E(G)$   
**Kérdés:** Van-e  $G$ -ben olyan kör, mely  $e$ -t tartalmazza?
5. **Input:**  $G$  gráf  
**Kérdés:** Kiszínezhető-e  $G$  száz színnel?
6. **Input:**  $G$  gráf és  $x, y, z \in V(G)$   
**Kérdés:** Kiszínezhetőek-e  $G$  pontjai három színnel jól úgy, hogy  $x, y$  és  $z$  különböző színű legyen?
7. **Input:**  $G$  gráf  
**Kérdés:** Van-e  $G$ -ben 1000 független pont?
8. **Input:**  $G$  gráf  
**Kérdés:** Van-e  $G$ -ben legalább 1000 hosszú kör?
9. **Input:**  $G$  gráf  
**Kérdés:** Kiszínezhető-e a  $G$  gráf 4 színnel úgy, hogy az első szint csak 4 csúcson, a második szint pedig csak egy csúcson alkalmazzuk?
10. Bizonyítsuk be, hogy a következő algoritmus polinom időben meghatároz egy olyan lefogó ponthalmazt egy tetszőleges irányítatlan  $G$  gráfban, melynek mérete legfeljebb kétszerese egy, a  $G$ -ben levő, minimális elemszámú lefogó ponthalmazénak! (Azaz lássa be, hogy ez egy 2-közelítő algoritmus.) Algo: keressünk tovább nem bővíthető független élhalmazt  $G$ -ben és válasszuk az ezen élek által lefedett pontokat.
11. Van  $n$  fájlunk, az  $i$ -edik fájl hosszát jelölje  $h_i$ . Tegyük fel, hogy a fájlok a hosszuk szerint nem csökkenő sorrendben követik egymást, azaz  $0 < h_1 \leq h_2 \leq \dots \leq h_n$ . Mentéskor két egyforma méretű lemez áll rendelkezésünkre. A mentésnek sorban kell történnie, előbb az első fájlról kell megmondani, melyik lemezre kerüljön, azután a másodikról, stb. (Fájlokat szétvágni nem szabad, minden fájl teljes egészében kerül az egyik vagy a másik lemezre.) Amikor a soron következő fájl már egyik lemezre se fér rá, akkor abbahagyjuk az eljárást. Egy ilyen eljárás optimális, ha a lehető legtöbb fájl lehet segítségével kimenteni. Mutassuk meg, hogy az a mohó eljárás, amikor a következő fájl oda tesszük, ahol több hely van, nem feltétlenül optimális. Legfeljebb hány fájlal fogunk kevesebbet kimenteni ezzel a mohó eljárással az optimális (szintén sorrendben mentő) megoldáshoz képest?
12. A ládapakolás feladatban tudjuk hogy az érkező tárgyak mérete kisebb mint  $1/k$ , ahol  $k \geq 3$  egész szám. Adjunk polinom idejű algoritmust, ami legfeljebb  $\frac{k}{k-1}OPT + 1$  darab ládát használ, amikor a legjobb pakolás  $OPT$  darab ládát igényel.
13. (*Gondolkodtató*) Éllistájával adott egy  $n$  csúcsú,  $e$  élű egyszerű, irányítatlan  $G$  gráf. Tudjuk, hogy  $G$ -ben van  $K > n/2$  elemszámú független ponthalmaz. Adjunk algoritmust, ami  $O(n+e)$  lépésben talál egy  $2K - n$  méretű független ponthalmazt  $G$ -ben.
14. Adott egy  $G = (V; E)$  egyszerű, irányítatlan gráf. Egy olyan  $W \subset V$  halmazt keresünk, amely a lehető legtöbb csúcsból áll és teljesül rá, hogy a gráfban bármely 2 független él 4 végpontjából  $W$  legfeljebb 2 pontot tartalmaz. Hogyan lehet ezt a problémát egészértékű programozási feladatként felírni? (A kapott EP feladatot nem kell megoldani!)
15. Adott egy egyszerű irányítatlan gráf, az élein pozitív egész súlyokkal. A gráfban egy párosítás súlya a benne levő élek súlyainak összege. Olyan párosítást keresünk a gráfban, amelynek a súlya maximális (az nem számít, hány élből áll, csak a súlya az érdekes). Hogyan lehet ezt a problémát egészértékű programozási feladatként felírni? (A kapott EP feladatot nem kell megoldani!)