

Bonyolultságelmélet I.

1. Mi az UNIÓ-HOLVAN adatszerkezet lényege? Milyen lépésszámokat garantálhatunk fás implementációval?
2. A $G(V, E)$ összefüggő, irányított gráf minden éle az $1, 2, \dots, k$ számok valamelyikével van súlyozva. Egy út értéke legyen az úton található élek súlyainak *maximuma*. Határozza meg, hogy ha adott két csúcs $x, y \in V$, akkor mennyi a lehető legkisebb értékű x -ből y -ba vezető út értéke. Ha G éllistával adott és e éle van, akkor a lépésszám legyen $O(e \log k)$.
3. Irányítatlan gráf tárolására adjunk meg egy adatszerkezetet az alábbi műveletekkel:

- ÚJCSÚCS(v): a gráfhoz hozzáad egy új csúcsot
- ÚJÉL(u, v): a már létező u és v csúcsok közé felvesz egy élet
- VANÚT(u, v): igen értéket ad vissza, ha vezet az u és v csúcsok között út, egyébként pedig nem értéket

Ha a tárolt gráfnak n csúcsa van, akkor mindhárom művelet lépésszáma legyen $O(\log n)$. Más műveletre nem kell számítani.

4. Hogyan definiáljuk a P , NP és a $coNP$ osztályokat?

NP-teljes (emlékeztető) (matematikailag nem feltétlenül korrekt):

3-SZÍN	G: G egy irányítatlan egyszerű gráf, aminek csúcsai kiszínezhetők 3 színnel
MAXFTLEN	(G, k): G egy gráf, amiben van k darab független pont
MAXKLIKK	(G, k): G egy gráf, amiben van k pontú teljes részgráf
H	G: G irányítatlan gráf, van benne Hamilton-kör
Hút	G: G irányítatlan gráf, van benne Hamilton-út
stHút	G: G irányítatlan gráf, van benne Hamilton-út s-ből t-be
3DH	(A, B, C; $F_1, \dots, F_n$): létezik olyan F-sorozat, hogy $A \cup B \cup C$ minden elemét pontosan egyszer fedik le
X3C	(A; $F_1, F_2, \dots, F_n$): A lefedhető pontosan egyszeresen egyes F_i halmazokat használva.
PARTÍCIÓ	($s_1, s_2, \dots, s_n$): két részre bontható, hogy a két rész összege egyenlő
RH	($s_1, s_2, \dots, s_n; b$): van részhalmaz, aminek az összege b
HÁTIZSÁK	($s_1, \dots, s_n; v_1, \dots, v_n; b, k$): van olyan indexhalmaz, hogy $\sum s \leq b$ és $\sum v \geq k$
RÉSZGRÁFIZO	(G_1, G_2): amelyre $\exists G' \leq G_2$, és $G' \simeq G_1$
EP	igaz az $Ax \leq b$ egyenlőtlenségrendszer, x egész vektor, mennyi cx skalárszorzat maximális értéke

5. Mutassuk meg az alábbi eldöntési problémákról, hogy NP-beliek. Melyekről tudjuk belátni, hogy P-ben vannak? Melyekről látjuk, hogy coNP-beliek?

- (a) **Input:** (G, k) ahol G páros gráf, k pozitív egész
Kérdés: G -ben van-e k élből álló párosítás?
- (b) **Input:** G irányítatlan gráf
Kérdés: G -ben van-e Euler kör?
- (c) **Input:** (G, k) ahol G irányítatlan gráf, k pozitív egész
Kérdés: G -ben van-e k darab független pont?
- (d) **Input:** $(s_1, \dots, s_n, b)$ pozitív egészek, ahol $1 \leq i \leq n$, b pozitív egész
Kérdés: Ki lehet-e választani néhány s_i -t, melyek összege b ?

6. Mutassuk meg, hogy alábbi L probléma NP-teljes úgy, hogy visszavezetjük rá a MAXFTLEN ismert NP-teljes nyelvet:
 $L = \{(G, a, b) : a, b > 0 \text{ egészek, a } G \text{ gráfnak van } K_{a,b} \text{ teljes páros gráffal izomorf feszített részgráf}\}.$

7. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi probléma NP-teljes:
 $L = \{(a_1, \dots, a_n) : a_i \text{ számok egészek és a számok három részre oszthatók úgy, hogy mindhárom rész összege ugyanannyi legyen}\}.$

8. Mutassuk meg, hogy az alábbi L probléma NP-teljes:
 $L = \{G(V, E) : G \text{ irányítatlan gráf, } |E| \leq 2|V|, \text{ a } G \text{ gráf színezhető 3 színnel}\}.$

9. Mutassuk meg, hogy az alábbi nyelv P-ben van, vagy azt, hogy NP-teljes:
 $L = \{(A, F_1, \dots, F_n; r) : \forall i\text{-re } F_i \subseteq A, |F_i| = 3, \text{ és az } F_i \text{ halmazok között van } r \text{ darab páronként diszjunkt}\}.$

10. Tudjuk, hogy a síkgráfokból álló nyelv P-ben van. Legyen a SÍK-MAXKLIKK nyelv a következő:
 $\{(G, k) | G \text{ egy síkgráf, amiben van } k \text{ pontú klikk}\}.$
Mutassuk meg, hogy ez a probléma NP-teljes, vagy mutassuk meg, hogy P-beli.