

Hash, DFS, DAG

1. Mi a baja az $f(K) = K^2 \pmod{7}$ hash-függvénynek, ahol 7 a táblaméret?
2. A hash-függvény legyen $f(K) = K$, a táblaméret $M = 7$, és $1 \leq K \leq 20$. Helyezzük el a táblában a 3, 4, 7, 11, 14, 17, 20 kulcsokat ebben a sorrendben
 - (a) lineáris
 - (b) kvadratikus maradék
 próbálást használva az ütközések feloldására.
3. Egy M méretű hash-táblába $n < M$ elemet raktunk be nyitott címzéssel, kvadratikus próbával. Ennek során t_1 ütközés történt, azaz ennyiszer kellett tovább próbálkoznunk – egy elem beszúrása során több ütközés is lehetett. Ugyanezt az n elemet ugyanabban a sorrendben beszúrtuk egy M^2 méretű hash-táblába is, de most lineáris próbával, $M \cdot h(x) + 1$ hash-függvénnyel, ekkor t_2 ütközés történt. Igazoljuk, hogy $t_2 \leq t_1!$ (ZH 2010. tavasz)
4. A $T[0 : M]$ táblában $2n$ elemet helyeztünk el az első $3n$ helyen ($3n < M$) egy ismeretlen hash-függvény segítségével. A táblában minden $3i$ indexű hely üresen maradt ($0 \leq i < n$). Legfeljebb hány ütközés lehetett, ha az ütközések feloldására
 - (a) lineáris próbálást
 - (b) kvadratikus maradék próbálást használtunk?
5. Nyitott címzéssel hasheltünk egy 11 elemű táblába a $h(k) = k \pmod{11}$ hash-függvény és kvadratikus maradék próba segítségével.
A következő kulcsok érkeztek (a megadott sorrendben): 6, 5, 7, 17, 16, 3, 2, 14. Adjuk meg a tábla végső állapotát!
6. A $b_0 \dots b_n$ alakú $n + 1$ hosszú bitsorozatot akarjuk tárolni. Tudjuk, hogy a b_0 paritásbit, ami a sorozatban az egyesek számát párosra egészíti ki. Ha nyitott címzésű hash-elést használunk $h(x) \equiv x \pmod{M}$ hash-függvénnyel és lineáris próbával, akkor $M = 2^n$ vagy $M = 2^n + 1$ méretű hash-tábla esetén lesz kevesebb ütközés?
7. A kezdetben üres M méretű hash-táblába sorban beraktuk a $k_1, k_2, \dots, k_n$ kulcsokat a $h(x) \equiv x \pmod{M}$ hash-függvénnyel, lineáris próbával. Jelölje t_1 a keletkezett táblában az egymás melletti foglalt mezők maximális számát. (Ciklikusan értve, azaz t_1 a következő beszúráskori leghosszabb próbасorozat hossza.) Amikor ugyanezt a $k_1, k_2, \dots, k_n$ sorozatot ugyanabban a sorrendben egy üres $2M$ méretű táblába rakjuk be a $h(x) \equiv x \pmod{2M}$ hash-függvénnyel, lineáris próbával, akkor a kapott táblában legyen t_2 az egymás melletti foglalt mezők maximális száma.
 - (a) Igazolja, hogy $t_2 \leq t_1$
 - (b) Igaz-e, hogy $t_1 \leq 2t_2$?
8. Egy 10 méretű hash-táblába kettős hash-elést használva helyezzük el a következő elemeket: 12, 5, 20, 11, 25, 2. A használt hash-függvény legyen $h(x) = 3x \pmod{10}$, a második hash-függvény pedig $h'(x) = (x \bmod 9) + 1$. (PPZH 2010. tavasz) Mi a baj a $h'(x)$ értékeivel?
9. A $T[0 : M - 1]$ táblában rekordokat tárolunk nyitott címzésű hashelt szervezéssel. Az ütközések feloldására lineáris próbálást alkalmazunk. Tehát ha a $h(K)$ sorszámú cella foglalt, akkor a K kulcsú rekordot a $h(K) - 1, h(K) - 2, \dots$ sorszámú cellák közül az első üresbe tesszük. Tegyük fel, hogy a tábla használata során egy hibás törlés történt: egy cellából kitöröltünk egy rekordot a törlés-bit beállítása nélkül.
 - (a) Igaz-e, hogy a hibás törlés helye mindig megtalálható?
 - (b) Adjunk hatékony (lineáris időigényű) algoritmust a tábla megjavítására. (Módosítsuk úgy a táblát, hogy megszűnjenek a hibás törlés negatív következményei.)
10. Hogyan működik a mélységi keresés (DFS)? Milyen éleket különböztet meg egy bejárás, van-e minden esetben az összes típusból? Lehet-e egy él más típusú ugyanabban a gráfban különböző/ugyanazon bejárásban? Milyen számokkal jellemezhetünk egy-egy csúcsot a bejárás szemponjából?

11. Hogyan viszonyulhat a fenti élek két végpontjának mélységi és befejezési száma egymáshoz egy irányított gráfban? És hogyan, ha nincs él?
12. A 6 pontú G gráf csúcsait jelölje x, y, z, u, v, w . A gráf egy mélységi bejárásánál a mélységi, ill. a befejezési számok a következők: x : 1,6; y : 2,4; z : 6,5; u : 3,3; v : 4,1; w : 5,2. Adjuk meg a bejáráshoz tartozó mélységi feszítőfa éleit. Rekonstruálható-e G az előző számok ismeretében?
13. Éllistával adott a súlyozott élű $G = (V, E)$ gráf. Tegyük fel, hogy az élek súlyai az 1,2,3 számok közül valók. Javasoljunk $O(n + e)$ uniform költségű algoritmust az $s \in V$ pontból az összes további $v \in V$ pontokba vivő legrövidebb utak hosszának a meghatározására. (Itt n a G gráf csúcsainak, e pedig az éleinek a száma.)
14. Legyen G egy irányítatlan összefüggő gráf. Igaz-e, hogy
 - (a) G minden f éléhez van G -nek olyan mélységi bejárása, amelyben f egy faél?
 - (b) G minden f éléhez van G -nek olyan szélességi bejárása, amelyben f egy faél?
 - (c) G minden F feszítőfájához van G -nek olyan mélységi bejárása, amelyben F minden éle faél?
 - (d) G minden F feszítőfájához van G -nek olyan szélességi bejárása, amelyben F minden éle faél?
15. Tekintsük az olyan G irányított gráfokat, amelyekben ha eltekintünk az élek irányításától, akkor a kapott irányítatlan G' gráf összefüggő. A G gráf egy mélységi bejárásánál maximálisan hány olyan csúcs lehet, amelyre a mélységi és a befejezési szám megegyezik?
16. Hogyan határozhatunk meg egy topologikus rendezést egy DAG-ban?
17. Egyértelmű-e a topologikus rendezés?
18. Hogyan tudjuk egy DAG-ban a leghosszabb utakat meghatározni?
19. Adott egy gráf, amely egy, kettő, három, öt és tíz órás taszkok egymásután következését jelöli. A csúcsok az egyes taszkoknak/feladatoknak felelnek meg, az u csúcsból pedig a v csúcsba pontosan akkor fut irányított él, ha az u taszk eredményére szükség van a v elkezdéséhez. Ha egyszerre akár az összes taszkon tudunk dolgozni, akkor hogyan határozhatjuk meg $O(\max(n, e))$ lépésben, hogy mennyi ideig fogunk mindenképpen dolgozni, és hogy elvégezhető-e minden feladat?
20. Egy n irányított gráf v pontjából indított egyik mélységi bejárásában 0 keresztél és 5 visszaél van. Hogyan tudjuk meghatározni a gráfban a leghosszabb kör hosszát $O(n + e)$ lépésben?