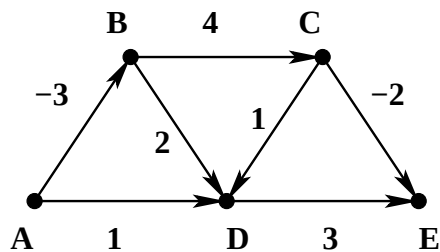


3. gyakorlat BFS - Legrövidebb utak gráfokban

1	$(\log n)^k$, ahol $k > 0$	n	$n \cdot \log n$	n^k , ahol $k \geq 2$	c^n , ahol $c > 1$	$n!$	n^n
---	-----------------------------	-----	------------------	-------------------------	----------------------	------	-------

- Melyik az a legkisebb egész k , amelyre igaz, hogy az alábbi kifejezés $O(x^k)$?
 - $2x^2 + x^3 \log x$
 - $(x^4 + x^2 + 1)/(x^4 + 1)$
 - $(x^3 + 5 \log x)/(x^4 + 1)$
 - $(8x)!$
- Igaz-e, hogy ha $|a| < |b|$, akkor $2^{|a|} < 2^{|b|}$ ($a, b \in \mathbb{R}$)? Igaz-e, hogy ha $f(n) = O(g(n))$, akkor $2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$.
- Legyen $w = w_1 w_2 \cdots w_n$ egy n betűből álló szó. Hívjuk részsónak w egy tetszőleges $w_i w_{i+1} \cdots w_{i+k}$ darabját ($1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq k \leq n-i$). Adjunk algoritmust, ami $O(n)$ lépésben meghatározza az összes a -val kezdődő és b -re végződő részsó számát.
- Egy n és egy m karakterből álló szövegben meg akarjuk találni a legnagyobb azonos darabot, azaz ha az egyik szöveg $a_1 a_2 \cdots a_n$ és a másik $b_1 b_2 \cdots b_m$, akkor olyan $1 \leq i \leq n$ és $1 \leq j \leq m$ indexeket keresünk, hogy $a_{i+1} = b_{j+1}$, $a_{i+2} = b_{j+2}$, $\dots$, $a_{i+t} = b_{j+t}$ teljesüljön a lehető legnagyobb t számra. Adjunk erre a feladatra $O(mn)$ lépést használó algoritmust.
- Hogyan járja be a BFS (*breadth-first-search*) a K_n és a $K_{n,n}$ gráfokat?
- Adjunk algoritmust, ami egy n csúcsú fában lineáris időben meghatározza a fában levő leghosszabb út hosszát.
- Legyen F egy n csúcsú fa, tetszőleges v csúcsának súlya pedig $s(v)$. Adjunk polinom idejű algoritmust, amely meghatározza az F fában található legnagyobb összsúlyú független ponthalmaz súlyát.
- Egy n szóból álló szöveget kell sorokra törölni. A szöveg i -edik szava ℓ_i karakterből áll, egy sor s karakter hosszú. Ha egy sor a szöveg i -edik szavával kezdődik és a j -edik szóval végződik, akkor az elválasztó szóközöket is figyelembe véve $t = s - (\ell_i + \ell_{i+1} + \cdots + \ell_j + j - i)$ üres hely marad a sor végén. Egy ilyen sor hibája legyen t^2 . A törölés hibája a nem üres sorok hibáinak összege. Adjunk $O(n^2)$ lépéses algoritmust egy legkisebb hibájú törölés meghatározására! (A szavak sorrendje rögzített.)
- Egy játékban egy $n \times m$ rács bal felső sarkából kell eljutnunk a jobb alsó sarokba. Egy lépés során a rács mentén vízszintesen vagy függőlegesen tudunk a következő rácpontba lépni. Azonban van néhány kereszteződés, ahova nem szabad lépniük. Ezek helyét az R tömb írja le, $R[i, j] = 1$, ha az (i, j) kereszteződésbe nem léphetünk, egyébként $R[i, j] = 0$. Adjunk $O(nm)$ futási idejű algoritmust annak meghatározására, hogy pontosan $n + m - 2$ lépést téve a rácson hányféleképpen tudjuk a célt elérni.
- Legyenek $a_1, a_2, \dots, a_n$ tetszőleges egész számok és $m < n^2$ egész. Adjunk algoritmust, amely a bináris alakjukkal megadott $a_1, a_2, \dots, a_n$ és m számokról eldönti polinom időben, hogy az $a_1, a_2, \dots, a_n$ számok közül kiválasztható-e néhány úgy, hogy az összegük m -mel osztva egyet adjon maradékul.
- (*gondolkodtató*) *Levenshtein-távolság*: Adott két füzér, melyek rendre az $a_1, a_2, \dots, a_n$ és $b_1, b_2, \dots, b_m$ karakterekből állnak. Határozzuk meg annak a legrövidebb műveletsornak a hosszát, amely az egyik füzért a másikba viszi át, ha a megengedett (azonosan egy költségű) műveletek: karakter törlés, karakter átírás, karakter beszúrás. Adjunk $O(n \times m)$ költségű algoritmust. Mire lehet ez a mérőszám jó?
- Az orosz cár sürgősen levelet szeretne küldeni a kínai császárnak. Ehhez a már jól bejáratott, Szentpétervárról Pekingbe vivő útvonalat szeretné használni, amin n város helyezkedik el sorban egymás után: $v_1, v_2, \dots, v_n$. A levelet postagalambok viszik egyik városból a másikba, a célba juttatásához persze több galambra is szükség lehet egymás után. A felesleges kitérők elkerülése érdekében a galambok mindig olyan v_i városból viszik a levelet v_j -be, amire $i < j$ teljesül. Segítsünk megtervezni a cárnak a leggyorsabb útvonalat, ha minden galambról tudjuk, hogy honnan hova tud repülni, és mennyi idő alatt teljesíti a távot! Elemezzük a megadott algoritmus hatékonyságát is!
- (*gondolkodtató*) Panka és Janka 1000 piros és 1000 zöld koronggal a következő játékot játssza. Kezdetben mindkettőjüknek 1000-1000 korongja van, tetszőleges eloszlásban. Ezután Panka minden lépésben mond egy x számot 1 és 500 között, mire Jankának vagy x darab piros korongját kell zöldre cserélnie Pankával, vagy x darab zöldet pirosra. (Így tehát egyik lánynak x -szel több, a másiknak x -szel kevesebb korongja lesz.) Janka célja, hogy a játék végén éppen 500 piros korongja legyen. Tegyük fel, hogy előre ismerjük a Panka által megadott számok $x_1, x_2, \dots, x_n$ sorozatát, valamint azt, hogy kezdetben hány piros illetve zöld korong van Jankánál. Adjunk $O(n)$ lépésszámú algoritmust, amely ez alapján eldönti, hogy Janka elérheti-e a célját! (*Vizsga 2009.01.14.*)

14. Adottak $t_1, t_2, \dots, t_n$ tárgyak, az i -edik tárgy súlya egy s_i egész szám ($0 < s_i < 100$). Ezeket a tárgyakat a sorrendet megőrizve (azaz mindig csak a soron következő elemet elhelyezve) ládába kell pakolnunk, minden ládába összesen legfeljebb 100 súlyú tárgyakat rakhatunk. Minden láda után adót kell fizetnünk: ha egy ládába s összsúlyú tárgyakat rakunk, akkor $(100 - s)^2$ gyémántfélkrajcárt kell fizetnünk. Adjunk algoritmust, amely meghatároz egy legolcsóbb pakolást $O(n^2)$ időben!
15. Adottak $M_1, M_2, \dots, M_n$ munkák $H_1, H_2, \dots, H_n$ határidőkkel és $P_1, P_2, \dots, P_n$ profitokkal. Mindegyik munka elvégzése pontosan 1 napunkba kerül (egy-egy napon csak egy munkát végezhetünk el). Adjunk hatékony algoritmust, amely meghatározza, hogy mely munkákat vállaljuk el a profit maximalizálása érdekében!
16. Éllistával adott egy $G = (V_1 \cup V_2, E)$ páros gráf és benne egy M párosítás. Hogyan ellenőrizhetjük, hogy a párosítás maximális-e? Mennyi a lépésszám? Hogyan változik a lépésszám, ha tudjuk, hogy a párosítatlan pontok száma V_2 -ben n -től függetlenül legfeljebb 6? Mennyi a lépésszám, ha $|V_1| = n - 6$?
17. Éllistával adott a súlyozott élű $G = (V, E)$ gráf. Tegyük fel, hogy az élek súlyai az 1,2,3 számok közül valók. Javasoljunk $O(n + e)$ uniform költségű algoritmust az $s \in V$ pontból az összes további $v \in V$ pontokba vivő legrövidebb utak hosszának a meghatározására. (Itt n a G gráf csúcsainak, e pedig az éleinek a száma.)
18. Legyen $G = (V, E)$ mátrixszal adott n -pontú, súlyozott élű irányított gráf. Tegyük fel, hogy G nem tartalmaz negatív összhosszúságú irányított kört, továbbá azt, hogy a G -beli egyszerű irányított utak legfeljebb 25 élből állnak. Javasoljunk $O(n^2)$ költségű módszert az $1 \in V$ pontból az összes további $v \in V$ pontokba vivő legrövidebb utak hosszának a meghatározására.
19. Határozzuk meg az A csúcsból az összes többi csúcsba vezető legrövidebb út hosszát az alábbi gráfban:



20. A 19. feladatban szereplő gráfban határozzuk meg Floyd módszerével az összes pontpárra a legrövidebb utak hosszát!
21. (Warshall) Hogyan határozhatnánk meg hatékonyan, hogy egy G gráf mely csúcsai között fut irányított él? (Az ezt reprezentáló gráfot a G tranzitív lezártjának nevezzük.)