

Bonyolultságelmélet

1. Mutassuk meg, hogy alábbi L probléma NP-teljes úgy, hogy visszavezetjük rá a MAXFTLEN ismerten NP-teljes nyelvet:
 $L = \{(G, a, b) : a, b > 0 \text{ egészek, a } G \text{ gráfnak van } K_{a,b} \text{ teljes páros gráffal izomorf feszített részgráf}\}.$
2. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi probléma NP-teljes:
 $L = \{(a_1, \dots, a_n) : a_i \text{ számok egészek és a számok három részre oszthatók úgy, hogy mindhárom rész összege ugyanannyi legyen}\}.$
3. Mutassuk meg, hogy az alábbi L probléma NP-teljes:
 $L = \{G(V, E) : G \text{ irányítatlan gráf, } |E| \leq 2|V|, \text{ a } G \text{ gráf színezhető 3 színnel}\}.$
4. Mutassuk meg, hogy az alábbi nyelv P-ben van, vagy azt, hogy NP-teljes:
 $L = \{(A, F_1, \dots, F_n; r) : \forall i\text{-re } F_i \subseteq A, |F_i| = 3, \text{ és az } F_i \text{ halmazok között van } r \text{ darab páronként diszjunkt}\}.$
5. Tudjuk, hogy a síkgráfokból álló nyelv P-ben van. Legyen a SÍK-MAXKLIKK nyelv a következő:
 $\{(G, k) | G \text{ egy síkgráf, amiben van } k \text{ pontú klikk}\}.$
Mutassuk meg, hogy ez a probléma NP-teljes, vagy mutassuk meg, hogy P-beli.
6. A G irányítatlan gráf minden x pontjához tartozik egy $s(x)$ súly. Célunk, hogy olyan feszítőfát találjunk a gráfban, amiben a levelekhez tartozó súlyok összege minimális. Fogalmazzuk meg a feladathoz tartozó problémát és lássuk be róla, hogy P-ben van, vagy azt, hogy NP-teljes.
7. Egy hivatal új épületbe fog költözni. Az épület minden emeletén ugyanakkora terület használható fel irodák kialakítására. Minden részleg megmondta, hogy összesen mekkora irodaterületre tart igényt. Azt akarjuk eldönteni, hogy meg lehet-e oldani a költözést úgy, hogy egyetlen részleg se legyen szétvágtva több részre, azaz teljes egészében egy emeleten legyen (de egy emeletre kerülhet több részleg is). Igazolja, hogy a probléma P-ben van, vagy azt, hogy NP-teljes.
8. Jelölje L_1 az irányítatlan összefüggő gráfokból álló nyelvet ("problémateret") és L_2 a Hamilton-kört tartalmazó gráfokból álló nyelvet. Lehetséges-e, hogy $L_1 \prec L_2$ illetve, hogy $L_2 \prec L_1$? Ha nem, miért nem? Ha igen, milyen feltétellel?
9. Igazoljuk, hogy ha $coNP \neq NP$, akkor $MAXKLIKK \notin P$.
10. Tegyük fel, hogy $P \neq NP$. Az alábbi feltételek közül melyikből következik és melyikből nem következik, hogy az X eldöntési probléma **nem** P-beli?
 - (a) Egy NP-teljes Y problémára X Karp-redukálható.
 - (b) Egy NP-teljes Y probléma X -re Karp-redukálható.
 - (c) Az X probléma NP-beli.

Az alábbi problémáknak határozzuk meg a bonyolultságát!

11. **Input:** G gráf és $S \subseteq V(G)$
Kérdés: Létezik-e olyan G -beli kör, ami S minden pontján átmegy?
12. **Input:** G gráf és $S \subseteq V(G)$
Kérdés: Létezik-e olyan G -beli kör, melynek minden pontja S -beli?
13. **Input:** G gráf és $e \in E(G)$
Kérdés: Van-e G -ben olyan kör, mely e -t tartalmazza?
14. **Input:** G gráf
Kérdés: Kiszínezhető-e G száz színnel?
15. **Input:** G gráf és $x, y, z \in V(G)$
Kérdés: Kiszínezhetőek-e G pontjai három színnel jól úgy, hogy x, y és z különböző színű legyen?
16. **Input:** G gráf
Kérdés: Van-e G -ben 1000 független pont?
17. **Input:** G gráf
Kérdés: Van-e G -ben legalább 1000 hosszú kör?