

Minimális feszítőfák, bonyolultságelmélet

1. A szoftverpiacon n féle grafikus formátum közötti oda-vissza konverzióra használatos programok kaphatók: az i -edik és a j -edik között oda-vissza fordító program ára a_{ij} , futási ideje pedig t_{ij} (ha létezik).
 - (a) Javasoljunk módszert annak megtervezésére, hogy minden egyes formátumról a saját grafikus terminálunk által megértett formátumra a lehető leggyorsabban konvertáljunk! (Az ár nem számít.)
 - (b) Javasoljunk módszert annak eldöntésére, hogy mely programokat vásároljuk meg, ha azt szeretnénk a lehető legolcsóbban megoldani, hogy a megvett programok segítségével bármelyik formátumról bármelyik más formátumra képesek legyünk konvertálni. (Itt a futási idő nem számít.)
2. Legyen adva egy (egyszerű, irányítatlan, összefüggő) n pontú G gráf éllistával, az élek súlyozásával együtt. Tegyük fel, hogy a G -ből a v_1 csúcs, valamint a v_1 -re illeszkedő élek elhagyásával keletkező G' gráf még mindig összefüggő, és adott G' egy minimális költségű feszítőfája. Adjunk minél hatékonyabb algoritmust a G gráf egy minimális költségű feszítőfájának az elkészítésére! (Teljes értékű megoldás: $O(n \log n)$ idejű algoritmus.)
3. Éllistával adott egy összefüggő, egyszerű, irányítatlan G gráf csupa különböző élsúlyokkal. Jelöljük n -nel a csúcsok, e -vel pedig az élek számát. Mutassunk egy lineáris (azaz $O(e)$) uniform költségű algoritmust, ami a G gráf egy minimális feszítőfájának $\lfloor 2n/3 \rfloor$ élét előállítja! (Egy olyan $\lfloor 2n/3 \rfloor$ elemszámú élhalmazt keresünk, ami biztosan része egy minimális költségű feszítőfának.)
4. Legyen adott egy $n \times n$ pixelből álló fekete-fehér kép. Szeretnénk a képen a bal felső saroktól a jobb alsó sarokig egy jobbra-lefele haladó határvonalat húzni úgy, hogy a vonaltól jobbra-felfele eső fekete, valamint a vonaltól balra-lefele eső fehér pixelek számának az összege a lehető legkisebb legyen. Oldjuk meg ezt a feladatot $O(n^2)$ időben!
5. Mi az UNIÓ-HOLVAN adatszerkezet lényege? Milyen lépésszámokat garantálhatunk fás implementációval? Mi az útössze-nyomás?
6. Irányítatlan gráf tárolására adjunk meg egy adatszerkezetet az alábbi műveletekkel:
 - ÚJCSÚCS(v): a gráfhoz hozzáad egy új csúcsot
 - ÚJÉL(u, v): a már létező u és v csúcsok közé felvesz egy élet
 - VANÚT(u, v): igen értéket ad vissza, ha vezet az u és v csúcsok között út, egyébként pedig nem értéket

Ha a tárolt gráfnak n csúcsa van, akkor mindhárom művelet lépésszáma legyen $O(\log n)$. Más műveletre nem kell számítani.

3-SZÍN	G : G egy irányítatlan egyszerű gráf, aminek csúcsai kiszínezhetők 3 színnel
MAXFTLEN	(G, k) : G egy gráf, amiben van k darab független pont
MAXKLIKK	(G, k) : G egy gráf, amiben van k pontú teljes részgráf
H	G : G irányítatlan gráf, van benne Hamilton-kör
Hút	G : G irányítatlan gráf, van benne Hamilton-út
stHút	G : G irányítatlan gráf, van benne Hamilton-út s -ből t -be
3DH	$(A, B, C; F_1, \dots, F_n)$: létezik olyan F -sorozat, hogy $A \cup B \cup C$ minden elemét pontosan egyszer fedik le
X3C	$(A; F_1, F_2, \dots, F_n)$: A lefedhető pontosan egyszeresen egyes F_i halmazokat használva.
PARTÍCIÓ	$(s_1, s_2, \dots, s_n)$: két részre bontható, hogy a két rész összege egyenlő
RH	$(s_1, s_2, \dots, s_n; b)$: van részhalmaz, aminek az összege b
HÁTIZSÁK	$(s_1, \dots, s_n; v_1, \dots, v_n; b, k)$: van olyan indexhalmaz, hogy $\sum s \leq b$ és $\sum v \geq k$
RÉSZGRÁFIZO	(G_1, G_2) : amelyre $\exists G' \leq G_2$, és $G' \simeq G_1$
EP	igaz az $Ax \leq b$ egyenlőtlenségrendszer, x egész vektor, mennyi cx skalárszorzat maximális értéke

7. Mutassuk meg az alábbi eldöntési problémákról, hogy NP-beliek. Melyekről tudjuk belátni, hogy P-ben vannak? Melyekről látjuk, hogy coNP-beliek?
 - (a) **Input:** (G, k) ahol G páros gráf, k pozitív egész
Kérdés: G -ben van-e k élből álló párosítás?
 - (b) **Input:** G irányítatlan gráf
Kérdés: G -ben van-e Euler kör?
 - (c) **Input:** (G, k) ahol G irányítatlan gráf, k pozitív egész
Kérdés: G -ben van-e k darab független pont?
 - (d) **Input:** $(s_1, \dots, s_n, b)$ pozitív egészek, ahol $1 \leq i \leq n$, b pozitív egész
Kérdés: Ki lehet-e választani néhány s_i -t, melyek összege b ?