

DFS, Minimális feszítőfák

1. Hogyan működik a mélységi keresés (DFS)? Milyen éleket különböztet meg egy bejárás, van-e minden esetben az összes típusból? Lehet-e egy él más típusú ugyanabban a gráfban különböző/ugyanazon bejárásban? Milyen számokkal jellemezhetünk egy-egy csúcsot a bejárás szemponjából?
2. Hogyan viszonyulhat a fenti élek két végpontjának mélységi és befejezési száma egymáshoz egy irányított gráfban? És hogyan, ha nincs él?
3. Adott egy gráf, amely egy, kettő, három, öt és tíz órás taszkok egymásután következését jelöli. A csúcsok az egyes taszkoknak/feladatoknak felelnek meg, az u csúcsból pedig a v csúcsba pontosan akkor fut irányított él, ha az u taszk eredményére szükség van a v elkezdéséhez. Ha egyszerre akár az összes taszkon tudunk dolgozni, akkor hogyan határozhatjuk meg $O(\max(n, e))$ lépésben, hogy mennyi ideig fogunk mindenképpen dolgozni, és hogy elvégezhető-e minden feladat?
4. Hogyan működik Prim, Kruskal illetve Borůvka módszere minimális feszítőfák keresésére? Mit tudunk az algoritmusok lépésszámáról egy n csúcsú, e élű gráfban? Mi a köze a piros-kék algoritmusnak a fenti módszerekhez? Mikor takaros egy színezés?
5. Éllistával adott egy G gráf, melynek n csúcsa és e éle van. A gráf minden csúcsához hozzá van rendelve egy 1 és k közötti egész szám (címke). Találjunk (ha létezik) olyan *tarika* utat a gráfban, amelyben minden $1 \leq i \leq k$ címke pontosan egyszer fordul elő. Az algoritmus lépésszáma legyen $O(k!(e + n))$.
6. Egy irányított G gráfban hagyjuk el a forrásokat és a nyelőket. A maradék gráfban ismét hagyjuk el a forrásokat és a nyelőket, ezt ismétéljük, amíg lehet. Bizonyítsuk be, hogy akkor és csak akkor kapunk üres gráfot, ha G -ben nincs irányított kör!
7. Mátrixával adott egy G irányítatlan súlyozott gráf. Adott még a G -nek egy F minimális súlyú feszítőfája, és az F -nek egy f éle. Adjunk $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, ami meghatározza, hogy az f él súlyát meddig lehet úgy felemelni, hogy az F a gráf minimális feszítőfája maradjon.
8. G irányítatlan gráf a következő éllistával (zárójelben jelölve a súlyokat, az éleket mindkét irányból felsorolva):
 $a: b(2), c(3); \quad b: a(2), d(3); \quad c: a(3), d(2); \quad d: b(3), c(2), e(4), f(2);$
 $e: d(4), f(1), g(2); \quad f: d(2), e(1), g(1), h(3); \quad g: e(2), f(3), h(4); \quad h: f(3), g(4);$
 - (a) Prim módszerével minimális költségű feszítőfát! (a -ból indulva)
 - (b) Kruskal módszerével minimális költségű feszítőfát!
 - (c) Borůvka módszerével minimális költségű feszítőfát! (a -ból, e -ből és h -ból indulva)
 - (d) a -ból kiinduló mélységi feszítőfát!
 - (e) a -ból kiinduló szélességi feszítőfát!
9. A szoftverpiacon n féle grafikus formátum közötti oda-vissza konverzióra használatos programok kaphatók: az i -edik és a j -edik között oda-vissza fordító program ára a_{ij} , futási ideje pedig t_{ij} (ha létezik).
 - (a) Javasoljunk módszert annak megtervezésére, hogy minden egyes formátumról a saját grafikus terminálunk által megértett formátumra a lehető leggyorsabban konvertáljunk! (Az ár nem számít.)
 - (b) Javasoljunk módszert annak eldöntésére, hogy mely programokat vásároljuk meg, ha azt szeretnénk a lehető legolcsóbban megoldani, hogy a megvett programok segítségével bármelyik formátumról bármelyik más formátumra képesek legyünk konvertálni. (Itt a futási idő nem számít.)
10. Legyen adva egy (egyszerű, irányítatlan, összefüggő) n pontú G gráf éllistával, az élek súlyozásával együtt. Tegyük fel, hogy a G -ből a v_1 csúcs, valamint a v_1 -re illeszkedő élek elhagyásával keletkező G' gráf még mindig összefüggő, és adott G' egy minimális költségű feszítőfája. Adjunk minél hatékonyabb algoritmust a G gráf egy minimális költségű feszítőfájának az elkészítésére! (Teljes értékű megoldás: $O(n \log n)$ idejű algoritmus.)
11. Éllistával adott egy összefüggő, egyszerű, irányítatlan G gráf csupa különböző élsúlyokkal. Jelöljük n -nel a csúcsok, e -vel pedig az élek számát. Mutassunk egy lineáris (azaz $O(e)$) uniform költségű algoritmust, ami a G gráf egy minimális feszítőfájának $\lfloor 2n/3 \rfloor$ élet előállítja! (Egy olyan $\lfloor 2n/3 \rfloor$ elemszámú élhalmazt keresünk, ami biztosan része egy minimális költségű feszítőfának.)
12. Legyen adott egy $n \times n$ pixelből álló fekete-fehér kép. Szeretnénk a képen a bal felső saroktól a jobb alsó sarokig egy jobbra-lefele haladó határvonalat húzni úgy, hogy a vonaltól jobbra-felfele eső fekete, valamint a vonaltól balra-lefele eső fehér pixelek számának az összege a lehető legkisebb legyen. Oldjuk meg ezt a feladatot $O(n^2)$ időben!