Algoritmuselmélet vizsga

A rendelkezésre álló munkaidő 100 perc. 2013. június 20.

Kérjük, minden résztvevő **nevét, NEPTUN kódját**, a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel. Ezen kívül a legfelső lapra írja rá **gyakorlatvezetője nevét** is (akihez a NEPTUN szerint jár), ill. egy, a személyazonosságát igazoló fényképes okmányt készítsen elő.
Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-31 pont: 1, 32-43 pont: 2, 44-55 pont: 3, 56-67 pont: 4, 68-80 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár.
Íróeszeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés.

Az eredményeket péntek délig igyekszünk közzétenni a honlapon.
Megtekintés, szóbeli: 2013. június 21. péntek, 14:00-15:00, QBF10

1. Írja le a kupacépítés algoritmusát. (Az építés során használt segédeljárásokat is írja le részletesen). Mennyi a kupacépítő eljárás lépésszáma, ha n elemből építünk kupacot? (A lépészámot nem kell igazolni.)

2. Egy irányított gráfról mélységi bejárás segítségével szeretnénk eldönteni, hogy DAG-e. Mondja ki és bizonyítsa be a kapcsolódó tételt.

3. Írja le a piros-fekete fa definícióját!

4. A következő n munkanap mindegyikén egy-egy munka érkezik hozzánk. Ha az i. munkát elvállaljuk, akkor azzal h_i forintot keresünk, de a munka elvégzéséhez n_i napra van szükségünk és így a munkafelvételi napot követő $n_i - 1$ napon nem tudunk újabb munkát elvállalni (ha egy munkát nem vállalunk el aznap, amikor érkezik, akkor arról végleg lemaradunk). Adjon algoritmust, ami a h_i, n_i értékek ($1 \leq i \leq n$) ismeretében $O(n^2)$ lépésben eldönti, hogy mely munkákat vállaljuk el, hogy a hasznunk maximális legyen. (Az nem baj, ha az utolsó munka elvégzése nem fér bele az n napba.)

5. Egy város úthálózatát egy adjacencia mátrixával adott n csúcsú irányítatlan gráf írja le. A gráf csúcsai a csomópontoknak, az élek pedig a csomópontok közötti közvetlen utaknak felelnek meg, a mátrix megadja bármely két csomópontra az utazási időt autóval a közvetlen úton.
   Adott két (nem feltétlenül szomszédos) csomópont, A és B, azt szeretnénk elérni, hogy nehezebb legyen A-ból B-be eljutni (azaz a leggyorsabb eljutási idő nőjön), ehhez egyetlen csomópont-pár között vezető közvetlen utat egyirányúvá tehetünk. Adjon $O(n^3)$ lépésszámú algoritmust, ami eldönti, hogy lehetséges-e ez (és ha igen, akkor javasol is egy olyan pontpárt, ahol az egyirányúsítást érdemes megtennünk.)

6. Gyorsrendezéssel akarunk rendezni, a rendezendő elemek száma $5m^4 \log m$. Igaz-e, hogy ekkor átlagosan $O(m^6)$ az összehasonlítások száma?

7. Jelölje $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ a következő eldöntési problémákat. Következik-e $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$-ból az, hogy P=NP?

   $\mathcal{A}$:

   Input: irányítatlan G gráf, k szám

   Kérdés: Igaz-e, hogy G-ben van k csúcsú teljes részgráf?

   $\mathcal{B}$:

   Input: G páros gráf, k szám

   Kérdés: Igaz-e, hogy G-ben van k élű párosítás?

8. P-ben van vagy NP-teljes az alábbi eldöntési probléma:

   Input: irányítatlan, n csúcsú G gráf és egy $k < n$ egész szám

   Kérdés: Igaz-e, hogy G olyan különleges, hogy G-ben van k független csúcs és G csúcsai 3 színnel színezhetők?