Algoritmuselmélet vizsgazárthelyi

2013. május 23.

A rendelkezésre álló munkaidő 100 perc.
Kérjük, minden résztvevő **nevét, NEPTUN kódját**, a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel. Ezen kívül a legfelső lapra írja rá **gyakorlatvezetője nevét** is (akihez a NEPTUN szerint jár).
Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-31 pont: 1, 32-43 pont: 2, 44-55 pont: 3, 56-67 pont: 4, 68-80 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy kiszámításakor a (legalább elégséges) zh pontszámát vesszük figyelembe.
Írószeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés.

1. Tudjuk, hogy az $f(n), g(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvényekre igaz, hogy $f(n) = \Omega(\log n)$ és $g(n) = \Theta(n^4)$. Lehetséges-e, hogy
(a) $f(n) = \Theta(g(n))$?
(b) $g(n) = O(f(n))$?
(Ez két, egymástól függetlenül megválaszolandó kérdés.)

2. Távmunkában fogunk dolgozni mostantól n napon át. Nem kell minden nap bejárnunk, de az alábbi három feltételt be kell tartanunk :
(i) két egymást követő benti munkanap között legfeljebb k nap telhet el,
(ii) az n nap során legfeljebb egyszer maradhatunk pontosan k napig távol,
(iii) az első és az n. napon be kell mennünk.
Sajnos a kék metróval járunk dolgozni, ami hol jár, hol nem, de szerencsére megjósolták nekünk, hogy a következő n napban mely napokon lesz üzemzavar, ezeken a napokon nem akarunk dolgozni menni (az első és az utolsó napon nem lesz üzemzavar).
Adjon algoritmust, ami a jóslás eredményének ismeretében $O(nk)$ lépésben meghatározza, hogy legkevesebb hány bemenéssel tudjuk megúszni ezt az n munkanapot.

3. Egy iskola minden osztályában anyák napi ünnepséget szeretnének tartani, az ünnepségeknek délután öt órakor kell kezdődniük. Az iskolába azonban testvérpárok is járnak, ezért azt szeretnék elérni, hogy a testvérek ünnepségei ne egy napon legyenek. Adjon algoritmust, ami annak ismeretében, hogy ki kinek a testvére és melyik gyerek melyik osztályba jár, eldönti, hogy lehetséges-e két napra elosztani az összes ünnepséget. Az algoritmus lépésszáma $O(n^2)$ legyen, ha az iskolában n osztály van. (Egy osztályban legfeljebb 32 gyerek van, inputként a testvérpárok listáját kapjuk, ezen jelezve van, hogy melyik testvér melyik osztályba jár.)

4. Hány éle van legalább annak a 6 pontú, egyszerű, irányítatlan gráfnak, melyen a Dijkstra algoritmust futtatva a a D tömb kezdetben így néz ki: 0, 2, 5, 1, ∞, 7; a végén pedig így néz ki: 0, 2, 4, 1, 10, 7? Mutasson egy konkrét példát a szélsőértéket elérő gráfra és lássa be, hogy ez valóban szélsőérték.

5. Egy kupac elemeit preorder bejárás szerint kiolvasva az alábbi számsorozatot kapjuk: 1, 17, 19, 21, 22, 31, 37, 2, 8, 3. Rekonstruálható-e ebből a kupac?

6. Egy k elemű számhalmaz mediánján a rendezés szerinti $\lceil k/2 \rceil$-adik elemet értsük. Tervezzen olyan adatstruktúrát, amiben n elem tárolása esetén a BESZÚR és MEDIÁNTÖRÖL értelemszerű eljárások minden esetben végrehajthatóak $O(\log n)$ lépésben.

7. Egy bináris keresőfában n különböző egész számot tárolunk. Adjon algoritmust, ami $O(n)$ lépésben eldönti, hogy van-e a tárolt számok között két olyan, melyek különbsége 2013.

8. Egy piros-fekete fában minden gyökértől különböző belső csúcs színét ellentétesre változtattuk és így is egy piros-fekete fát kaptunk. Jellemezze azokat a piros-fekete fákat, amikre ez megtörténhetett!