

Algoritmuselmélet pótzárthelyi

A rendelkezésre álló munkaidő 100 perc.

2013. április 24.

Kérjük, minden résztvevő **nevét**, **NEPTUN kódját**, a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel. Ezen kívül a legfelső lapra írja rá **gyakorlatvezetője nevét** is (akihez a NEPTUN szerint jár).

Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-31 pont: 1, 32-43 pont: 2, 44-55 pont: 3, 56-67 pont: 4, 68-80 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy kiszámításakor a (legalább elégséges) zh pontszámát vesszük figyelembe.

Írószereken és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés.

1. Egy algoritmus lépésszámáról tudjuk, hogy $T(n) = T(\lfloor n/4 \rfloor) + O(n^2)$ és tudjuk azt is, hogy $T(1) = T(2) = T(3) = 1$. Bizonyítsa be, hogy $T(n) = O(n^2)$.
2. Adott egy teljes bináris fa, a csúcsaiba egész számok vannak írva, összesen n darab (a fa nem feltétlenül bináris keresőfa). Adjon algoritmust, ami $O(n)$ lépésben megkeres egy olyan csúcst a fában, aminek a részfája kupac és aminek a magassága a lehető legnagyobb az összes ilyen csúcs között. (*A fa mutatókkal van megadva.*)
3. Kukori és Kotkoda egy-egy bináris fára gondolnak (nem feltétlenül bináris keresőfákra). Következik-e, hogy a két fa azonos, ha
 - (a) inorder bejárással kiolvastva a két fát ugyanazt a számsorozatot kapják?
 - (b) preorder bejárással kiolvastva a két fát ugyanazt a számsorozatot kapják?(Az (a) és (b) rész két külön kérdés.)
4. Éllistával adott n csúcsú, élsúlyozott, irányítatlan gráfként ismerjük egy ország úthálózatát (a csomópontok a városok, az élek a közvetlen összeköttetések a városok között). Az élek súlya azt adja meg, hogy hány (egész) perc alatt tudjuk megtenni az adott útszakaszt. Nagy havazás várható, de szerencsére pontosan tudjuk a következő k percre, hogy mely élek (utak) mikortól nem lesznek járhatóak. Ha egyszer járhatatlanná válnak, akkor úgy is maradnak, ezután már az úton nem lehet közlekedni és ha épp az adott élen vagyunk, amikor az járhatatlanná válik, akkor elakadunk. Adjon $O(k(n+e))$ lépést használó algoritmust, ami az adatok ismeretében el tudja dönteni, hogy el lehet-e jutni A városból B városba, ha most azonnal indulunk!
5. Egy n soros és kettő oszlopos táblázatban adott n számpár (egy sor egy számpárt tartalmaz, a számok mind különböző egész számok a táblázatban). Szeretnénk a táblázat sorait úgy átrendezni, hogy a 2. oszlop szerint növekvő sorrendben legyenek a sorok (számpárok). Egy fajta műveletet hajthatunk csak végre: kijelölhetünk néhány egymás alatti sort (számpárt) és ezeket lerendezhetjük az első oszlop szerint növeően vagy csökkenően. Adjon algoritmust, ami csak ezt a fajta műveletet használva $O(n)$ lépésben megoldja a feladatot!
6. Adott egy n hosszú tömb. Tudjuk, hogy a tömb első néhány (k darab) eleme 0, a többi 1, de k értékét nem ismerjük. Adjon olyan $O(\log k)$ (*nem* $O(\log n)$) összehasonlítást használó algoritmust, ami meghatározza k értékét.
7. Adott egy n és egy k elemet tartalmazó kupac. Adjon olyan $O(n+k)$ összehasonlítást használó algoritmust, ami létrehoz egy olyan kupacot, ami a két kupacban tárolt elemek halmazának unióját tartalmazza. (Tegyük fel, hogy a két kupacban csupa különböző szám áll.)
8. Bizonyítsa be, hogy egy piros-fekete fában egy levél testvére vagy levél vagy piros csúcs.