

Algoritmuselmélet vizsga
2013. január 17.

A rendelkezésre álló munkaidő 100 perc.
Az indoklás elengedhetetlen része a megoldásnak. Indoklás nélküli megoldásra nem jár pont.
Az eredményeket közzéteesszük a www.cs.bme.hu/algel weboldalon, várhatóan szombat este.
Minden feladat 10 pontot ér, a ponthatárok: 0-31: elégtelen, 32- 43: elégséges, 44- 55: közepes, 56-67: jó, 68-80: jeles.
Kiosztás és opcionális szóbeli január 21-én, 10.00-kor az IB 140-ben.

1. Írja le a buborékrendezés algoritmusát! Adja meg és indokolja meg, hogy mennyi az algoritmus lépésszáma, ha n rendezendő elem van!
2. Ebben a feladatban piros-fekete fákkal kapcsolatos kérdésekre kell válaszolnia. Mikor mondjuk egy bináris fáról, hogy piros-fekete fa? Mit értünk egy piros-fekete fában egy csúcs fekete-magasságán? Mekkora egy n elemet tároló piros-fekete fa magassága? (Bizonyítani nem kell.)
3. Mondja ki és igazolja a Karp-redukció tranzitivitását!
4. Néhány napot Londonban szeretnénk tölteni, ahol n barátunk lakik. Szállásra nincs pénzünk, ezért barátainknál szeretnénk aludni, de senkit sem akarunk nagyon kihasználni, így mindenkinél legfeljebb egy éjszakát szeretnénk tölteni. 2013. január 23-án akarunk indulni, ezért megkérdezzük mindenkitől, hogy az ezt követő n éjszakából melyikekre tud minket befogadni és ez alapján szeretnénk megtervezni egy menetrendet úgy, hogy minél több éjszakára legyen szállásunk. (Az első olyan napon haza kell jönnünk, amelynek estéjén nincs kihez mennünk aludni a fenti feltételek betartásával.) Adjon algoritmust, ami barátaink válaszainak ismeretében $O(n^3 \log n)$ lépésben meghatároz egy január 23-án kezdődő, lehető leghosszabb tartózkodást lehetővé tevő menetrendet!
5. Tudjuk, hogy az $f(n)$ és $g(n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ függvényekre igaz, hogy $f(n) = O(n^3 \log n + 2^n)$ és $g(n) = \Theta(n^{10})$. Döntse el, hogy a $g(n) = O(f(n))$ állítás
(i) mindig igaz vagy (ii) néha igaz, néha nem vagy (iii) sosem igaz!
6. Kettős hashelést használva akarunk elemeket tárolni egy $M = 11$ méretű hash táblában. Az első hash függvény a $(K \bmod 11)$, a második hash függvény pedig az $1 + (K \bmod 5)$ értéket rendeli a K kulcshoz. Eddig csak beszúrások történtek, a tábla állapota jelenleg ez:

	1	2					19	32
--	---	---	--	--	--	--	----	----

Hajtsa végre az alábbi műveleteket az adott sorrendben a fenti táblaállapotból kiindulva: BESZÚR(8), BESZÚR(6), TÖRÖL(32), TÖRÖL(6), KERES(57), BESZÚR(57), KERES(13), BESZÚR(13). (Mindegyik műveletnél jelezze, hogy milyen utat járt végig!)

7. Bizonyítsa be, hogy $X \prec \text{MAXKLIKK}$ fennáll, ha X az alábbi eldöntési probléma:
Input: egy G irányítatlan, élsúlyozott gráf és abban egy kijelölt e él
Kérdés: Igaz-e, hogy G -nek van olyan minimális súlyú feszítőfája, melyben szerepel az e él?
8. Bizonyítsa be, hogy a következő eldöntési feladat P-ben van vagy azt, hogy NP-teljes!
Input: egy irányítatlan G gráf
Kérdés: Igaz-e, hogy a G gráf csúcsai kiszínezhetőek 5 színnel úgy, hogy van két olyan szín, amit csak egy-egy csúcsnál használunk? (A színezéskor szomszédos csúcsoknak különböző színt kell kapniuk.)