

Algoritmuselmélet vizsga  
2013. január 10.

A rendelkezésre álló munkaidő 100 perc.

Az indoklás elengedhetetlen része a megoldásnak. Indoklás nélküli megoldásra nem jár pont.

Az eredményeket közzéteesszük a [www.cs.bme.hu/algel](http://www.cs.bme.hu/algel) weboldalon, várhatóan szombat este.

Minden feladat 10 pontot ér, a ponthatárok: 0-31: elégtelen, 32- 43: elégséges, 44- 55: közepes, 56-67: jó, 68-80: jeles.

Kiosztás és opcionális szóbeli január 14-én, 14.00-kor az IB 140-ben.

1. Mikor mondjuk egy  $n$  különböző számot tartalmazó bináris fáról, hogy kupac? Hogyan kell végrehajtani egy ilyen kupacon a MINTÖR eljárást és mennyi ennek az eljárásnak a lépésszáma? (Ha a MINTÖR leírása során használ valami tanult eljárást, akkor azt is írja le részletesen! A lépésszámot nem kell igazolni.)
2. Adja meg a topologikus sorrend definícióját! Éllistájával legyen adott egy olyan  $n$  csúcsú,  $e$  élű gráf, melynek van topologikus sorrendje. Hogyan és hány lépésben lehet ezt a sorrendet mélységi bejárás segítségével előállítani? (Indokolni nem kell.)
3. Adja meg pontosan a H és a RÉSZGRÁFIZO eldöntési feladatok definícióját! Adjon meg köztük egy Karp-redukciót és lássa is be, hogy az adott visszavezetés valóban Karp-redukció!
4. Egy város úthálózatát egy irányítatlan, élsúlyozott, mátrixával adott  $n$  csúcsú gráf írja le. A gráf csúcsai a város csomópontjainak felelnek meg, az élsúlyok az egyes csomópontpárok közt vezető út hosszát adják meg (ott, ahol létezik közvetlen út). Adott továbbá egy másik mátrix is, ami megadja tetszőleges csomópontpárra a köztük levő távolságot légvonalban. Szeretnénk a város egy kijelölt  $u$  csúcsából egy másik kijelölt  $v$  csúcsába eljutni úgy, hogy utunk során egyszer teleportálhatunk, de ezt leszámítva végig a gráf éleinek megfelelő úthálózatot kell használnunk. Teleportáláskor egy tetszőleges csomópontból azonnal egy másik csomópontba ugorhatunk, feltéve, hogy a két csomópont légvonalbeli távolsága legfeljebb 2013 méter. Egy ilyen, legfeljebb egy teleportálást tartalmazó út hossza az út során a gráf élei szerint megtett távolságok összege (tehát a teleportálás távolsága nem számít bele). Adjon  $O(n^2)$  lépést használó algoritmust, ami meghatározza a legrövidebb ilyen út hosszát!
5. Egy 2-3 fában 2013 különböző páros számot tárolunk. Bizonyítsa be, hogy ekkor biztosan létezik olyan (nem feltétlenül páros) szám, melynek beszúrásakor csúcsvágást kell végrehajtanunk!
6. A 2013 csúcsú teljes gráf csúcsait 1-től 2013-ig megszámoztuk különböző egész számokkal, az  $i$ -edik és  $j$ -edik sorszámú csúcs közt menő él súlya legyen  $i + j$ . Mely élek és milyen sorrendben kerülnek be a minimális súlyú feszítőfába, ha az 1. csúcsból futtatjuk a Prim algoritmust? (Az összes lehetséges minimális feszítőfát adja meg, amit így kaphatunk.)
7. Jelölje  $X$  az alábbi eldöntési problémát:  
**Input:**  $G$  irányítatlan gráf      **Kérdés:** Igaz-e, hogy  $G$ -ben van 2013 csúcsú kör?  
Lehetséges-e az, hogy  $P=NP \cap coNP$  és  $X \prec 3\text{-SZÍN}$  egyszerre fennáll?
8. Tekintsük a HÁTIZSÁK eldöntési feladatnak azt a speciális esetét, amikor minden tárgy súlya legfeljebb 2013. Igazolja, hogy ez az eldöntési probléma  $P$ -ben van, vagy azt, hogy  $NP$ -teljes! Az eldöntési feladat formálisan a következő:  
**Input:**  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n, v_1, \dots, v_n, b, k \mid b, k, s_i, v_i \in \mathbb{N} \text{ és } s_i \leq 2013 \text{ minden } 1 \leq i \leq n \text{ esetén}\}$   
**Kérdés:** Igaz-e, hogy létezik olyan  $S \subseteq \{1, \dots, n\}$  indexhalmaz, hogy  $\sum_{i \in S} s_i \leq b$  és  $\sum_{i \in S} v_i \geq k$ ?