Algoritmuselmélet vizsga
2013. január 3.

A rendelkezésre álló munkaidő 100 perc.
Az indoklás elengedhetetlen része a megoldásnak. Indoklás nélküli megoldásra nem jár pont.
Az eredményeket közzétesszük a www.cs.bme.hu/algel weboldalon, várhatóan szombaton este.
Minden feladat 10 pontot ér, a ponthatárok: 0-31: elégtelen, 32- 43: elégséges, 44- 55: közepes, 56-67: jó, 68-80: jeles.
Kiosztás és opcionális szóbeli január 7-én, 10.00-kor az IB 140-ben.

1. Írja le a Floyd-algoritmus lényegét alkotó rekurziós formulát! Magyarázza el a formulában szereplő jelöléseket és azt, hogy a formula miért igaz! (A Floyd-algoritmus egy gráfban minden pontpárra meghatározza a köztük levő legrövidebb út hosszát.)

2. Magyarázza el, hogy hogyan kell végrehajtani a keresést és a törlést akkor, ha kettős hash-t használunk !

3. Mi az Utazóügynök optimalizálási feladat (TSP)? Mit jelent az, hogy egy $\mathcal{A}$ algoritmus α-közelítő algoritmus erre a feladatra ($\alpha \geq 1$)? Mondja ki pontosan az Utazóügynök feladatról tanult közelíthetetlenségi eredményt!

4. Adott a számegyenesen n darab zárt intervallum: $[a_1, b_1], \ldots, [a_n, b_n]$ (a $2n$ darab végpont csupa különböző egész szám). Ehhez az intervallumrendszerhez elkészítjük azt az egyszerű, irányítatlan gráfot, melynek csúcsai az intervallumoknak felelnek meg és két csúcs között pontosan akkor húzunk élet, ha a két megfelelő intervallumnak van közös pontja. Adjon $O(n \log n)$ lépésszámú algoritmust, ami meghatározza, hogy az így kapott gráfban mekkora a legnagyobb klikk (teljes részgráf) mérete!

5. Egy piros-fekete fában az 1, 2, 8, 10, 17 és 18 kulcsokat tároljuk, az egyes elemeket tartalmazó csúcsok színei a következők: 1: fekete, 2: piros, 8: fekete, 10: fekete, 17: fekete, 18: piros. Rajzolja fel az összes lehetséges ilyen piros-fekete fát!

6. Hajtson végre mélységi bejárást a D csúcsból (az összes pontot bejárva) az alábbi irányított gráfon, adja meg a mélységi és befejezési számokat is és mutasson rá, hogy a bejárás mely pontján és milyen módon derül ki, hogy a gráfban van irányított kör! A gráf éllistája : **A**:C, E; **B**:A, E; **C**:D, E; **D**:G; **E**:F; **F**: A; **G**: $-$.
(Ha az eljárás végrehajtása során több lehetséges folytatás kínálkozik, akkor az ábécé sorrend szerinti legelsőt válassza.)

7. Tegyük fel, hogy $P \neq coNP$. Létezhet-e ekkor olyan X eldöntési probléma, melyre $X \prec H$ és Partíció $\prec X$ egyszerre fennáll? (Itt H a Hamilton-kör eldöntési problémát jelöli.)

8. Igazolja, hogy a következő eldöntési probléma P-ben van, vagy azt, hogy NP-teljes!

   Input: egy n csúcsú egyszerű, irányítatlan G gráf

   Kérdés: Igaz-e, hogy G-ben van $\frac{n}{3}$ méretű független csúcshalmaz?