Algoritmuselmélet pótzárthelyi
2012. november 16.

1. Tudjuk, hogy az $\mathcal{A}$ algoritmus lépésszámát leíró $f(n)$ függvényre igaz, hogy $f(n) = O(\sqrt{n}\log\log n)$. Következik-e ebből, hogy
   (a) az algoritmus lépésszáma $O(n \log \sqrt{n})$?
   (b) az algoritmus lépésszáma $\Theta(n \log \sqrt{n})$?

2. Adjon algoritmust, ami egy n hosszú, a $0, 1, 2, \ldots, 9$ számjegyekből álló szóról (számsorozatról) eldönti, hogy van-e benne olyan, legalább 4 számjegyből álló részszó, ami egynél többször fordul elő a teljes sorozatban. (Egy részszó néhány, közvetlenül egymás után következő karakterből áll, a két előfordulás lehet átfedő is). Az algoritmus lépésszáma legyen $O(n)$.

3. Egy egyetemi képzés utolsó évében n darab szakirány indul, mindegyik k hallgató fogadására képes. A jelentkező legfeljebb nk hallgató mindegyike megjelölhet legfeljebb három szakirányt (sorrend nélkül), ahova szívesen kerülne. Adjon algoritmust, ami $O(n^2k^3)$ lépésben eldönti, hogy megoldható-e úgy a szakiránybeosztás, hogy mindenki olyan helyre kerüljön, ahova szívesen menne.

4. Egy összefüggő, irányítatlan G gráfról tudjuk, hogy minden szélességi feszítőfája egy út, ha a feszítőfa éleinek irányításától eltekintünk. (A kapott útnak a bejárás kezdőpontja lehet belső pontja is.) Mi lehet ez a G gráf?

5. Egy irányított gráf csúcshalmaza $\{A, B, C, D, E, F, G\}$, az élek és súlyaik pedig az alábbiak: $s(A, C) = 1$, $s(A, D) = 5$, $s(B, A) = 3$, $s(C, D) = 2$, $s(C, E) = -5$, $s(D, B) = -6$, $s(D, E) = 1$, $s(F, E) = 0$, $s(F, G) = 1$. Futtassa ezen a gráfon a Bellman-Ford algoritmust az A csúcsból vett legrövidebb utak hosszának meghatározására.

6. Egy kezdetben üres bináris keresőfába szúrja be az alábbi elemeket ebben a sorrendben: $7, 3, 5, 4, 12, 8, 9$, majd törölje a keletkezett fából a 7-t, aztán pedig a 12-t. Minden lépés után adja meg az aktuális állapotot!

7. Dr. Watson boldogan újságolja Sherlock Holmes-nak, hogy kitalált egy olyan algoritmust, ami $O(\log\log n)$ összehasonlítással megtalálja egy n különböző elemet tartalmazó (rendezetlen) tömb nagyság szerint középső elemét: ha $n = 2k + 1$, akkor a $(k + 1)$., ha $n = 2k$, akkor a k. elemet. (Egy összehasonlításkor a tömb két eleméről kérdezhetjük meg, hogy melyik a nagyobb, az algoritmus ezen kívül csak mozgatásokat használ.) Sherlock Holmes felvilágosítja, hogy ilyen algoritmus létezése lehetetlen, az összehasonlítás-alapú rendező algoritmusokra adott alsó korlát miatt. Fejtse ki (magyarázza el) dr. Watsonnak, hogy mire gondolt Sherlock Holmes.

8. Egy tömb a $3, 5, y, x, 12, 10, 100, 7, 16, 21$ számokat tartalmazza. Határozza meg x és y értékét, ha tudjuk, hogy ez a tömb egy olyan kupacot reprezentál, ami csupa különböző egész számot tartalmaz és azt is tudjuk, hogy egy MINTÖR után a gyökérbe y kerül.