

Algoritmuselmélet vizsga
2012. május 31.

1. Írja le a ládarendezés algoritmusát! Mennyi az algoritmus lépésszáma, ha n rendezendő egész számunk van, melyek az $[1, m]$ tartományba esnek? A lépésszámot indokolja is meg!
2. Piros-fekete fában mit értünk egy csúcs fekete-magasságán? Mondja ki és bizonyítsa be a magasság és a fekete-magasság közt fennálló összefüggéseket!
3. Adja meg a MAXKLIKK és RÉSZGRÁFIZO problémák pontos definícióját és adjon meg egy MAXKLIKK \prec RÉSZGRÁFIZO Karp-redukciót! (A Karp-redukció jóságát nem kell igazolni.)
4. Egy nagy nyári fesztiválon több helyszínen zajlanak a programok, összesen n esemény van. Előre eldöntjük, hogy mik érdekelnek minket és azt is eldöntjük, hogy amire elmegyünk, azon az elejétől a végéig ott leszünk. Tudjuk, hogy melyik program mikor kezdődik és végződik (tegyük fel, hogy csúszás nincs) és ismerjük azt is, hogy a helyszínek között mennyi idő alatt lehet átélni. Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, ami a minket érdeklő programok közül kiválasztja a lehető legtöbbet, amin részt tudunk venni.
5. Egy 2-3 fában az alábbi kulcsokat tároljuk: 1, 5, 7, 8, 12, 13, 20, 21, a levelek feletti szinten a csúcsoknak (balról jobbra haladva) 3, 3, 2 levelük van.
 - (a) Rajzolja fel a 2-3 fát, adja meg a belső csúcsokban levő címkéket is!
 - (b) Szúrja be a fába a 6-ot, adja meg az így kapott fát (a belső csúcsokban levő címkéket is)!
6. Egy város úthálózatát egy adjacenciamátrixával adott irányítatlan, n csúcsú gráf írja le. A város útjai kivétel nélkül felújításra szorulnak, minden élre adott a megfelelő útszakasz felújítási költsége. Szerencsére a város annyi pénzt igényelhet útfelújításra, amennyit csak akar, de az összes tervezett útfelújítást egyszerre kell elvégezni és ha egy útszakaszon dolgoznak, akkor az az él nem használható. Szeretnénk a lehető legnagyobb költségű felújítást megtalálni azzal a feltétellel, hogy a városnak járhatónak kell maradnia eközben, azaz bármely két csúcs között kell, hogy legyen út felújítás alá nem eső élekből. Adjon algoritmust, ami $O(n^2)$ időben talál egy ilyen felújítást!
7. Jelölje Y az alábbi eldöntési feladatot:

Input: G irányítatlan gráf és egy k egész szám

Kérdés: Igaz-e, hogy G -ben nincsen k -fokú csúcs?

Lehetséges-e, hogy $NP \neq P$ és $Y \prec RH$ egyszerre fennáll?
8. Igazolja, hogy a következő eldöntési probléma P-ben van, vagy azt, hogy NP-teljes!

Input: G irányítatlan gráf és G egy kijelölt v csúcsa

Kérdés: Igaz-e, hogy G kiszínezhető 4 színnel úgy, hogy v szomszédainak színei között a v csúcsától különböző összes többi 3 szín előfordul?