

Algoritmuselmélet pótzárthelyi  
2012. április 25.

A rendelkezésre álló munkaidő 100 perc.

Kérjük, minden résztvevő **nevét, NEPTUN kódját**, a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan és helyesen* tüntesse fel. Ezen kívül a legfelső lapra írja rá **gyakorlatvezetője nevét** is (akihez a NEPTUN szerint jár). Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-31 pont: 1, 32-43 pont: 2, 44-55 pont: 3, 56-67 pont: 4, 68-80 pont: 5. A pusztá (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy kiszámításakor a (legalább elégséges) zh pontszámát vesszük figyelembe. Írószeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés. **Az eredményeket a gyakorlatvezetőtől lehet majd megtudni.**

1. Tudjuk, hogy az  $f(n), g(n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  függvényekre igaz, hogy  $f(n) = O(g(n))$ , de  $f(n) \neq \Theta(g(n))$ . Lehetséges-e, hogy  $f(n) + 2012 \cdot n^{\log n} = \Theta(n \cdot \log n + g(n))$ ?
2. Egy  $n$ -szer  $n$ -es táblázat minden kockájába egy (nem feltétlenül pozitív) egész szám van írva vagy rózsaszínnel vagy sárgával. Sétát szeretnénk tenni a táblázatban a következő feltételekkel: a séta bárhol indulhat és bárhol végződhet, egy lépésben vagy balra vagy felfelé léphetünk egy mezőt, de csak akkor ha közben színt is váltunk. Egy ilyen séta értéke a közben érintett mezőkön levő számok összege (a végponti mezők is számítanak). A séta állhat egy mezőből is, azaz végződhet ott, ahol kezdődik. Adjon algoritmust, ami  $O(n^2)$  lépésben meghatározza a táblázatban található legértékesebb séta hosszát.
3. Űrhajónkkal egy véges, egydimenziós univerzumban ragadtunk, amelynek pontjait 0 és  $r$  közötti egész koordinátákkal azonosítjuk. A közlekedést a  $0 \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq r$  koordinátákon elhelyezett *tükörteleportok* segítik: egy-egy tükörteleport aktiválásakor űrhajónk pozíciója tükröződik a teleport pozíciójára, azaz például az  $y$  koordinátáról a  $2x_i - y$  koordinátára jutunk (vagy megsemmisülünk, ha ezzel kilépnénk az univerzumból). Az  $s$  koordinátáról indulva szeretnénk a  $t$  koordinátán található – menekülést jelentő – féregjárathoz jutni. Adjon  $O(r^2)$  lépésszámú algoritmust, amely meghatározza, hogy ehhez legkevesebb hányszor kell teleportálnunk!
4. Egy irányított gráf csúcshalmaza  $\{A, B, C, D, E, F\}$ , az élek és súlyaik pedig az alábbiak:  $s(A, B) = 2$ ,  $s(A, C) = 7$ ,  $s(A, D) = 3$ ,  $s(A, F) = 4$ ,  $s(B, C) = 4$ ,  $s(C, E) = 3$ ,  $s(D, B) = x$ ,  $s(D, E) = 2$ ,  $s(E, F) = 4$ ,  $s(F, C) = 2x$ .  
Az  $x$  nemnegatív valós paraméter függvényében határozza meg az  $A$  csúcsból a többi csúcsba vett legrövidebb utak hosszát a Dijkstra algoritmussal !
5. Egy  $n$ -szer  $n$ -es táblázatban az  $1, 2, \dots, n^2$  egész számok vannak valamilyen sorrendben (az  $n^2$  szám mindegyike pontosan egyszer szerepel). Szeretnénk ezeket a számokat rendbe rakni, úgy, hogy az  $i$ . sorban  $((i - 1)n + 1)$ -től  $in$ -ig legyenek növekvően a számok, minden  $1 \leq i \leq n$  esetén. A számokat csak egyféleképpen tudjuk mozgatni: két (nem feltétlenül szomszédos) elemet felcserélhetünk.  
(a) Adjon  $O(n^2)$  cserét használó algoritmust a feladat megoldására! (A cserén kívül bármi más korlátlanul szabad csinálnunk.)  
(b) Létezik-e olyan algoritmus, ami  $O(n \log n)$  cserével megoldja a feladatot?
6. Egy kezdetben üres bináris keresőfába szúrja be az alábbi számokat az alábbi sorrendben: 7, 72, 12, 27, 10, 4, 6, 5, majd törölje ki a 7-t, aztán pedig a 72-t.  
Minden lépés után adja meg az aktuális állapotot.
7. Egy kupac elemeit inorder bejárás szerint kiolvastva a 13, 12, 31, 10, 14, 4, 23, 18, 51 sorozatot kapjuk. Rajzolja fel a kupacot!
8. Mekkora lehet egy olyan piros-fekete fa magassága, amiben 7 elemet tárolunk?