Algoritmuselmélet zárthelyi

A rendelkezésre álló munkaidő 100 perc. 2012. március 26.
Kérjük, minden résztvevő **nevét, NEPTUN kódját**, a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel. Ezen kívül a legfelső lapra írja rá **gyakorlatvezetője nevét** is (akihez a NEPTUN szerint jár).
Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-31 pont: 1, 32-43 pont: 2, 44-55 pont: 3, 56-67 pont: 4, 68-80 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy kiszámításakor a (legalább elégséges) zh pontszámát vesszük figyelembe.
Írószeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés.
Az eredményeket hétfő délig igyekszünk közzétenni a honlapon.
Megtekintés, szóbeli: 2012. január 20. péntek, 13:00-14:00, valahol a tanszék környékén

1. Tudjuk, hogy az $f(n), g(n)$ pozitív értékeket felvevő függvényekre igaz, hogy $f(n) = O(g(n))$. Következik-e ebből, hogy $2012^{\log n} + f(n) = O(\frac{1}{2012}n^{2012} + g(n))$?

2. Egy w méter széles folyón szeretnénk átkelni a folyó medrébe lerakott n darab cölöp segítségével. A cölöpök a folyó két partja között, a folyó partjára merőleges egyenes vonalban helyezkednek el, $0 < x_1 < x_2 < \dots x_n < w$ méterre a kiindulási parttól (w és az összes x_i távolság egész szám). Az első lépésben egy métert ugorhatunk, utána pedig az igaz, hogy minden ugrás vagy pontosan egy méterrel nagyobb vagy pontosan egy méterrel kisebb, vagy ugyanakkora, mint az előző. Adjunk algoritmust, ami az x_i számok ismeretében $O(nw)$ lépésben eldönti, hogy át tudunk-e jutni a túlsó partra anélkül, hogy a vízbe esnénk.

3. Egy városban 17 busztársaság közlekedik, az egyes társaságok buszait csak a társaság saját buszbérletével lehet használni. Nekünk maximum két társaság bérletére van pénzünk (a bérletek ugyanannyiba kerülnek). A város buszhálózatát ismerjük: bármely két megállóra adott, hogy van-e közöttük közvetlen járat (amelyik közben nem áll meg máshol) és ha igen, akkor melyik társaság üzemelteti (lehet több társasásgnak is járata ugyanott). Adjunk $O(n^2)$ lépésszámú eljárást, ami n buszmegálló esetén eldönti, hogy melyik két bérletet vegyük meg, hogy a lehető legtöbb buszmegállóba el tudjunk jutni a lakásunkhoz legközelebb eső megállóból gyaloglás nélkül. (Az átszállások számára nincs korlátozás.)

4. Egy irányított gráf csúcshalmaza $\{A, B, C, D, E, F\}$, az élek és súlyaik pedig az alábbiak: $s(A, B) = 2$, $s(A, C) = 7$, $s(A, D) = 3$, $s(A, F) = 6$, $s(C, E) = 3$, $s(D, B) = -2$, $s(D, C) = -4$, $s(D, E) = -2$, $s(E, F) = 4$.
Futtassa ezen a gráfon a Bellman-Ford algoritmust az A csúcsból vett legrövidebb utak hosszának meghatározására.

5. Egy szalagon $n = 2^k$ különböző súlyú csomag várakozik, ezeket szeretnénk sorbarendezni súly szerint növekvően. Két eszközünk van ehhez: egy mérlegelő szerkezet, ami a sorban elöl álló és egy tetszőleges másik csomagról megmondja, hogy melyik a nehezebb (anélkül, hogy a csomagok helyzetén változtatna) és egy daru, ami tetszőleges csomagot a sor végére tud rakni (ekkor persze a hátrarakott csomag utáni csomagok mind egy-egy hellyel előrébb csúsznak). Adjon olyan eljárást, ami a fenti két műveletből $O(nk)$-t használva sorbarakja az $n = 2^k$ csomagot. A fenti két eszközön kívül mást nem tehetünk a csomagokkal, pl. nem rakhatjuk le őket a szalagról, nem mérhetjük meg egyesével a súlyukat, de azt pl. nyilvántarthatjuk, hogy melyik csomagokat mozgattuk eddig.

6. Építsen kupacot az órán tanult (lineáris idejű) kupacépítő algoritmussal az alábbi tömbből: $17, 12, 13, 8, 4, 2, 1$. Minden lényegi lépés után adja meg az aktuális állapotot és jelezze, hogy miért történt változás.

7. Egy bináris keresőfában 100-nál kisebb, különböző egész számokat tárolunk. Egy keresés során az alábbi számokat láttuk (ebben a sorrendben): $7, x, 8, 97, 20, 10$. Mik x lehetséges értékei?

8. Egy piros-fekete fában az $1, 2, \dots, 10$ egész számokat tároljuk. Mely számok állhatnak a fa gyökerében?